Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 3 – Concentration des contraintes près des entailles

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

La figure 7 donne, à titre d'exemple, les variations de la contrainte $\sigma_y)_{y=0}$ pour un trou elliptique ($a/b=3, K_t=7$) et pour un trou circulaire ($K_t=3$). Cette figure montre que la diminution de la contrainte est plus rapide dans le cas du trou elliptique[1].

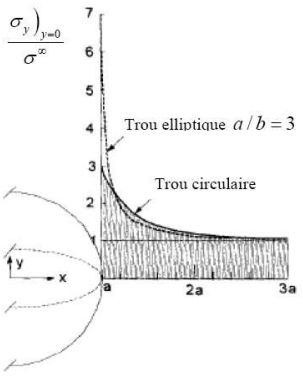


Figure 7. Variations de la contrainte au bord d'un trou elliptique et d'un trou circulaire

[1] J. Schijve, « Fatigue of Structures and Materials », Kluwer Academic Publishers, 2001.

Le gradient de contrainte de $\sigma_y\big)_{y=0}$ à la racine du trou ($x=a$), que l'on notera pour simplifier l'écriture $\left(d\sigma_y/dx\right)_{x=a}$, est obtenu par différentiation des relations :

$$\frac{\sigma_y\big)_{y=0}}{\sigma^\infty}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^4$$

Trou circulaire

$$\frac{\sigma_y\big)_{y=0}}{\sigma^\infty}=1+\frac{N(x)}{D(x)}$$

Trou elliptique

• Le gradient de contrainte pour le trou elliptique s'exprime par :

$$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=\sigma^\infty\left(\frac{N'(x)}{D(x)}-N(x)\frac{D'(x)}{D^2(x)}\right)_{x=a}$$

Avec $N(x)\big)_{x=a}=2ab^2(a-b)^2$, $N'(x)\big)_{x=a}=a(a-b)^2(2a-3b)$ et $D(x)\big)_{x=a}=(a-b)^2b^3$, $D'(x)\big)_{x=a}=3ab(a-b)^2$

$$\left.\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=\sigma^\infty\left(-\frac{a^2}{x^3}-\frac{6a^4}{x^5}\right)_{x=a}=-\frac{7\sigma^\infty}{a}$$

Trou circulaire

$$\left.\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=-\sigma^\infty\frac{a(4a+3b)}{b^3}$$

Trou elliptique

Les deux relations précédentes peuvent se mettre sous une forme unique

$$\left.\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=-\frac{7\sigma^\infty}{a}$$

Trou circulaire

$$\left.\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=-\sigma^\infty\frac{a(4a+3b)}{b^3}$$

Trou elliptique

$$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a}=-\gamma\frac{\sigma^{\max}}{\rho}$$

Trou circulaire

$\rho=a \quad \sigma^{\max}=3\sigma^\infty$

Trou elliptique

$\rho=\dfrac{b^2}{a} \quad \sigma^{\max}=\sigma^\infty\left(1+2\dfrac{a}{b}\right)$

$$-7\frac{\sigma^\infty}{a}=-\frac{7}{3}\frac{\sigma^{\max}}{\rho}=-\left(2+\frac{1}{K_t}\right)\frac{\sigma^{\max}}{\rho}$$

Trou circulaire

$$-\frac{\sigma^\infty}{\rho}\frac{4a+3b}{b}=-\frac{\sigma^{\max}}{\rho}\left(\frac{4a+3b}{2a+b}\right)=-\left(2+\overbrace{\frac{b}{2a+b}}^{1/K_t}\right)\frac{\sigma^{\max}}{\rho}$$

Trou elliptique

Le coefficient de proportionnalité γ a la même expression pour les deux géométries de trou

$$\gamma=2+\frac{1}{K_t}$$

$$2<\gamma<3$$

TD5 : Gradient de contrainte

Soit une plaque entaillée chargée en traction. Le gradient de contrainte à la racine de l'entaille de facteur de concentration K_t et de rayon à fond d'entaille ρ, est donné par :

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\left(2 + \frac{1}{K_t}\right)\frac{\sigma^{\max}}{\rho} \qquad [1]$$

où $\sigma^{\max} = K_t\sigma^{\text{nom}}$ est la contrainte maximale à la racine de l'entaille.

Déterminer en linéarisant la relation [1] :

1- les distances δ le long de l'axe d'un trou circulaire de diamètre 5mm où les chutes de contrainte sont respectivement de 2, 5 et 10%
2- la contrainte moyenne dans tous les grains adjacents à la racine d'une entaille où la chute de contrainte n'excède pas 10% ; la plaque sollicitée à $\sigma^{\text{nom}} = 20MPa$ est en acier au manganèse à structure ferrito-perlitique dont la taille moyenne des grains est $d_g = 12\mu m$ et l'entaille en question est de forme elliptique avec $a = 2,5cm$ et $b = 0,5cm$.

3- le rayon à fond d'entaille ρ pour une entaille facteur $K_t = 5$ sachant que la chute de contrainte est de 5% en un point éloigné de $50\mu m$ de la racine de l'entaille ; même question pour un point éloigné de $100\mu m$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
4- le facteur K_t d'une entaille de rayon $\rho = 2mm$ sachant que la chute de contrainte est de 2,5% à une distance de $20\mu m$
5- les distances minimale et maximale où la chute de contrainte est de 5% pour une entaille de rayon à fond d'entaille $\rho = 1mm$

Corrigé TD5

Gradient de contrainte dans une plaque trouée, chargée en traction

Le gradient est proportionnel à la contrainte maximale $\sigma^{\max} = K_t\sigma^{nom}$ et inversement proportionnel au rayon à fond d'entaille ρ. Ces variations sont décrites par la relation suivante :

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\gamma\frac{\sigma^{\max}}{\rho} \qquad \text{où} \qquad \gamma = 2 + \frac{1}{K_t} \text{ reste compris entre 2 et 3}$$

1- Trou circulaire $(K_t = 3)$ de rayon $\rho = 2,5mm$

- Distance δ depuis la racine du trou, où la chute de contrainte est de 2,5%

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{(0,975-1)\sigma^{\max}}{\delta} = -(2+\frac{1}{3})\frac{\sigma^{\max}}{2,5} \quad \Rightarrow \delta = \frac{0,025}{(2+\frac{1}{3})}2,5 = 27\mu m$$

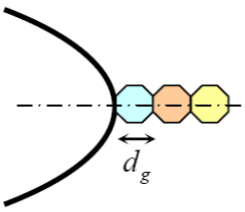
- Distance δ depuis la racine du trou, où la chute de contrainte est de 10%

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{-0,1\sigma^{\max}}{\delta} = -(2+\frac{1}{3})\frac{\sigma^{\max}}{2,5} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{0,1}{(2+\frac{1}{3})}2,5 = 107\mu m$$

2- Entaille de $K_t = 1+\frac{2a}{b} = 11$ (entaille elliptique $a=2,5cm$ et $b=0,5cm$),

$$\sigma^{nom} = 20MPa, \sigma^{\max} = K_t\sigma^{nom} = 220MPa \qquad \rho = \frac{b^2}{a} = 1mm$$

Contrainte σ^{g1} atteinte à l'extrémité du premier grain de diamètre $d_g = 12\mu m$:



$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\sigma^{g1}-\sigma^{\max}}{d_g} = -(2+\frac{1}{11})\frac{\sigma^{\max}}{1}$$

soit

$$\sigma^{g1} = \sigma^{\max}\left(1-d_g(2+\frac{1}{11})\frac{1}{1}\right) = 0,97\times 220 = 214,5MPa$$

La contrainte moyenne σ^{m1} dans ce premier grain est : $\sigma^{m1} = \frac{220+214,5}{2} = 217,3MPa$

De même à l'extrémité du second grain : $\sigma^{g2} = \sigma^{\max}(1-2d_g(2+\frac{1}{11}) = 209MPa$

La contrainte moyenne σ^{m2} dans ce second grain est : $\sigma^{m2} = \frac{214,5+209}{2} = 211,8MPa$

A l'extrémité du 3e grain, la contrainte est : $\sigma^{g3} = \sigma^{\max}(1-3d_g(2+\frac{1}{11}) = 203,4MPa$

La contrainte moyenne σ^{m3} dans ce 3e grain est : $\sigma^{m3} = \frac{209+203,4}{2} = 206,2MPa$

A l'extrémité du 4e grain, la contrainte est : $\sigma^{g4} = \sigma^{\max}(1-4d_g(2+\frac{1}{11}) = 197,9MPa$

La contrainte moyenne σ^{m4} dans ce 4e grain est : $\sigma^{m4} = \frac{203,4+197,9}{2} = 200,7MPa$

La distance δ où la chute de contrainte atteint 10% est :

$$\delta = \frac{0,1}{2+\frac{1}{11}}1 = 48\mu m$$

Soit 4 grains.

3- Rayon à fond d'entaille ρ pour une entaille facteur $K_t = 5$ sachant que la chute de contrainte est de 5% en un point éloigné de $50\mu m$.

$$\frac{-0,05\sigma^{\max}}{\delta(=50\mu m)} = -(2+\frac{1}{5})\frac{\sigma^{\max}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = 2,2mm$$

Et si $\delta = 100\mu m$, le rayon à fond d'entaille vaut :

$$\rho = (2+\frac{1}{5})\frac{\delta}{0,05} = 4,4mm$$

4- Facteur K_t d'une entaille de rayon $\rho = 2mm$ sachant que la chute de contrainte est de 2,5% à une distance de $20\mu m$

$$\frac{-0,025\sigma^{\max}}{\delta(=20\mu m)} = -(2+\frac{1}{K_t})\frac{\sigma^{\max}}{\rho(=2mm)} \quad \Rightarrow \quad K_t = \frac{1}{\frac{\rho}{\delta}0,025-2} = 2$$

5- Distances minimale et maximale où la chute de contrainte est de 5% pour une entaille de rayon $\rho = 1mm$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{-0,05\sigma^{\max}}{d} = -\gamma\frac{\sigma^{\max}}{\rho} \qquad \text{avec } 2<\gamma<3$$

Soit

$$d_{\min} = 0,05\frac{\rho}{3} = 17\mu m \qquad \text{et} \qquad d_{\max} = 0,05\frac{\rho}{2} = 25\mu m$$

Gradient de contrainte le long du bord d'une entaille

Lorsque les structures sont conçues avec des entailles, l'amorçage des fissures de fatigue se produit généralement en surface à fond d'entaille : l'état de surface (rugosité de surface, présence ou non de rayures qui amplifient la concentration de la contrainte…) a une forte influence sur cet amorçage. Aussi il est intéressant d'examiner comment varie la contrainte, non pas uniquement le long de l'axe de l'entaille, mais également le long du bord de celle-ci, surtout lorsque la présence de rayures n'est pas exclue. La variation de la contrainte au bord d'un trou circulaire est illustrée sur la figure 8a où les lignes d'isocontraintes principales sont déterminées par calculs aux éléments finis (un exemple de maillage est indiqué sur la figure 8b).

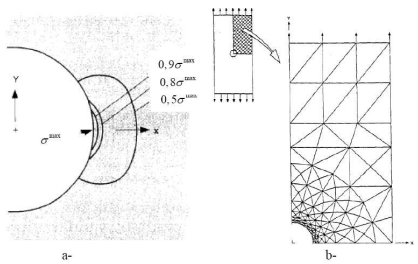


Figure 8. a- Variation de la contrainte aux bords d'un trou circulaire déterminée par calcul aux éléments finis
b- maillage de la plaque trouée

Ces lignes d'isocontraintes principales déterminées par calculs aux EF, sont à des niveaux correspondant à 90%, 80% et 50% de la contrainte maximale[2]. Ce résultat, obtenu grâce au développement des moyens de calcul au début des années 80, confirme qualitativement des mesures de contraintes par photo élasticité (figure 9) effectuées une dizaine d'années auparavant[3]. Il est intéressant de noter que la diminution de la contrainte le long du bord de l'entaille est relativement moins rapide que celle observée lorsqu'on se déplace le long de l'axe x en partant de la racine. Comme l'amorçage des fissures se fait en surface, il apparaît donc que le gradient de contraintes sur le bord de l'entaille est au moins aussi important que le long de l'axe de celle-ci.

Figure 9. Franges d'isocontraintes déterminées par photoélasticité

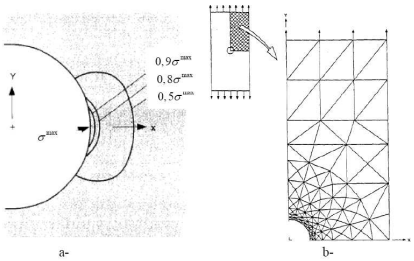


Figure 8. a- Variation de la contrainte aux bords d'un trou circulaire déterminée par calcul aux éléments finis
b- maillage de la plaque trouée

[2] J. Schijve, « Stress gradients around notches », Fatigue of Engineering Materials and Structures, vol. 3, 325-338, 1981.
[3] R.B. Heywood, « Designing by photo-elasticity », Pergamon Press, 1969.

Les entailles de grande taille ont une plus grande surface de matériau le long de leur bord et donc le risque d'amorçage de fissure de fatigue est plus élevé.

D'autre part, la relation $$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a} = -\gamma\frac{\sigma^{max}}{\rho}$$

montre que le gradient est inversement proportionnel au rayon ρ à fond d'entaille.

Il est donc nécessaire d'examiner les effets d'échelle sur la concentration de la contrainte au voisinage d'une entaille

Influence de la géométrie et du chargement sur le facteur K_t

La détermination théorique du facteur de concentration de contraintes du paragraphe précédent considère que les dimensions de l'entaille sont faibles par rapport à celles de la structure. Seules les dimensions de l'entaille (a et b pour une entaille elliptique et diamètre D lorsque l'entaille est circulaire) interviennent dans l'approche théorique.

Considérons à présent une plaque sollicitée en traction, de largeur W et de longueur L, percée en son centre d'un trou circulaire de diamètre D. La figure 10 montre deux plaques avec cette configuration de chargement, de dimensions différentes, mais ayant les mêmes rapports D/W et D/L.

Le facteur K_t est un rapport sans dimension. Il ne dépend donc que des rapports géométriques. Si toutes les dimensions de la plaque 2 (figure ci-contre) sont doubles de celles de la plaque 1, le facteur K_t et la contrainte maximale atteinte à la racine de l'entaille sont les mêmes. Cependant, la plaque 2 a une plus grande surface d'entaille fortement sollicitée et donc la probabilité d'amorçage d'une fissure de fatigue est plus élevée. Ce constat permet d'appréhender les effets d'échelle.

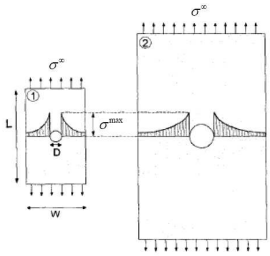


Figure 10. Plaques similaires ayant le même K_t mais des gradients de contraintes différents

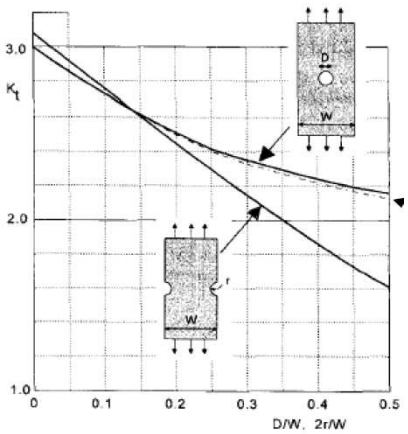
Plusieurs manuels spécialisés donnent les valeurs du K_t pour un grand nombre de géométries et de configurations de chargement[4,5].

[4] R. E. Peterson, « Stress concentrations Factors », John Wiley & Sons, New York, 1974
[5] « Stress concentrations Factors », ESDU Engineering Data, Structures, London, 1995

La figure ci-contre montre la variation du K_t pour une plaque de dimensions finies, entaillée sur ses bords ou percée d'un trou circulaire.

La variation de K_t pour la plaque percée en son centre est donnée par la relation de Heywood[6].

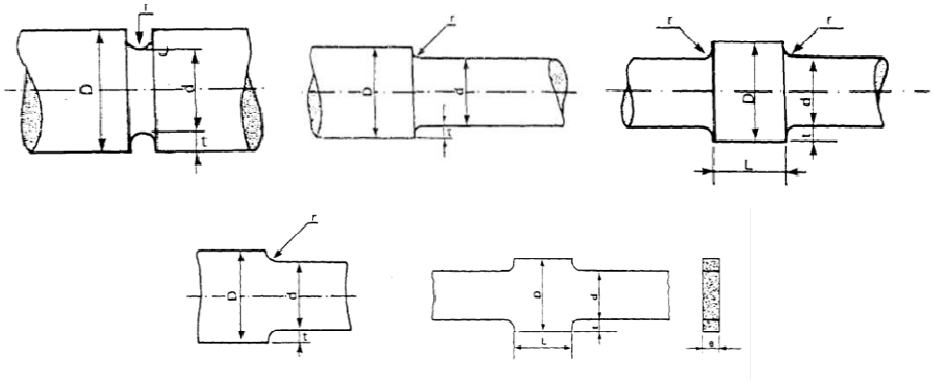
$$K_t = 2 + \left(1 - \frac{D}{W}\right)^3$$



[6] R.B. Heywood, « Designing against fatigue », Chapman and Hall, 1962

* *Formules pratiques pour le calcul du facteur K_t*

Les formules de Neuber[7] sont très utilisées pour calculer le facteur de concentration des contraintes dans des éléments de structures tels que des arbres ou des plaques avec gorge et/ou épaulement.

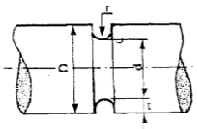


[7] H. Neuber, « Theory of notch stresses », J. D. Edwards and A. Arbor eds., 1946

Formules de Neuber

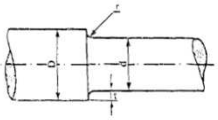
$$K_t = 1 + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{aK_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{bK_q}\right)^2}} \quad où \quad K_p = \sqrt{1 + \frac{d}{2r}} - 1 \quad et \quad K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{2r}{D-d}}}$$

Les coefficients a et b ont pour valeurs selon l'élément de structure et le type de sollicitation :



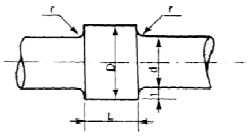
a- Arbre avec gorge semi circulaire

Traction :	$a = 1{,}197$	$b = 1{,}871$
Flexion :	$a = 0{,}715$	$b = 2$
Torsion :	$a = 0{,}365$	$b = 1$



b- Arbre avec épaulement simple

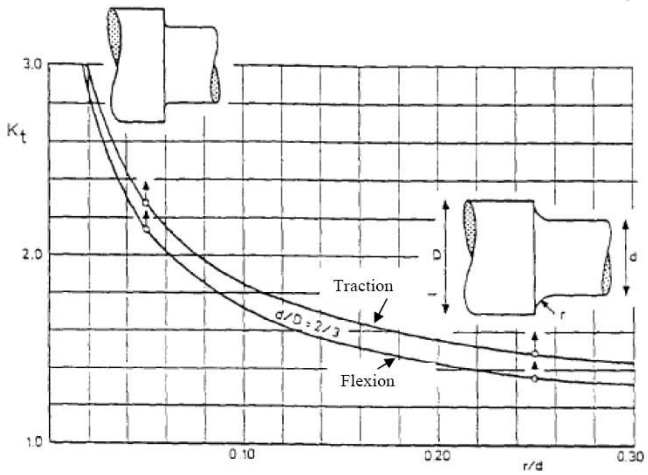
Traction :	$a = 0{,}88$	$b = 0{,}843$
Flexion :	$a = 0{,}541$	$b = 0{,}843$
Torsion :	$a = 0{,}263$	$b = 0{,}843$



c- Arbre avec double épaulement

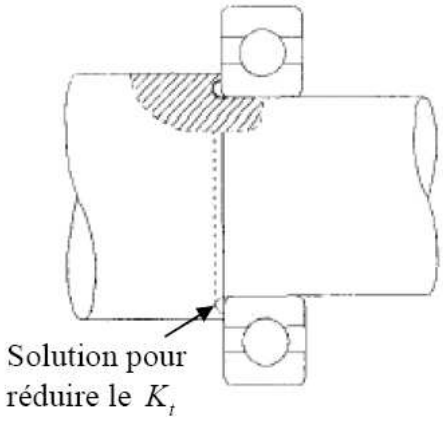
Si $L > 2d$, même valeurs de a et b que le cas précédent
Sinon ($L < 2d$), mêmes valeur de a et b mais en remplaçant dans la relation [II.15] D par un diamètre équivalent, D_{eq}, donné par :

$$D_{eq} = d + 0{,}3L$$

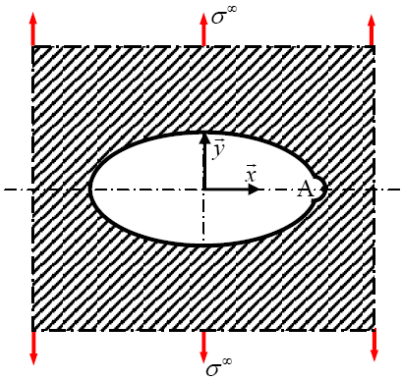


La figure ci-dessus illustre les variations du K_t dans un arbre épaulé sollicité en traction ou en flexion, déduites des formules de Neuber. Elle montre également l'effet du rayon de raccordement sur la valeur du K_t.

Un rayon de raccordement élevé diminue la valeur du K_t, mais en pratique il n'est pas toujours possible d'augmenter ce rayon. Aussi, on a recours à des solutions technologiques telle que celle indiquée sur la figure ci-dessous.



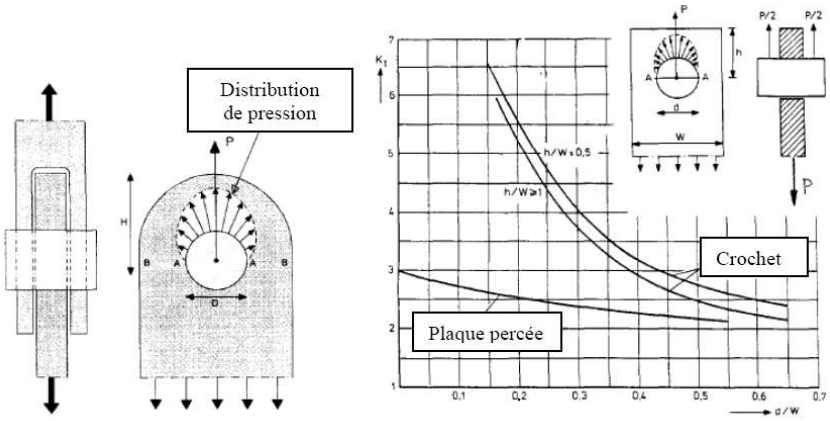
Superposition d'entaille - Supposons qu'à l'intérieur d'une entaille de facteur K_{t1} se trouve une entaille de facteur K_{t2} ; cette situation schématisée ci-dessous, est à éviter dans la pratique.



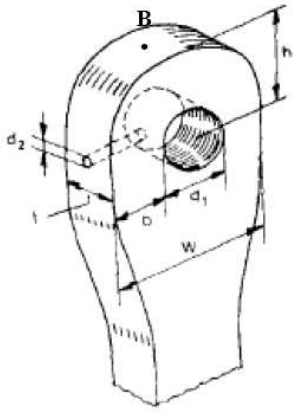
La contrainte maximale au point A situé au fond du petit trou est donnée par :

$$\sigma_A \approx K_{t_2}\left(K_{t_1}\sigma^\infty\right) = K_t\sigma^\infty \qquad \text{avec} \qquad K_t = K_{t_1}K_{t_2}$$

Examinons à présent l'assemblage par goupille d'un crochet avec une chape (c'est un cas que l'on rencontre souvent dans la pratique).



Dans la section BB, le K_t est élevé au point A.

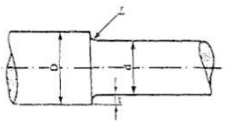


On peut envisager dans l'exemple précédent un orifice de lubrification. Il faut éviter au cours de la conception que cet orifice débouche dans une zone de forte concentration des contraintes. La solution indiquée sur la figure ci-dessus n'est pas la bonne car elle conduit à une superposition de la concentration des contraintes.
La solution idéale est de lubrifier à partir du point B.

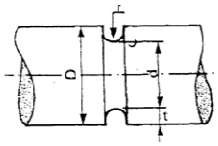
TD6 : Concentration de contraintes dans des arbres

Un arbre épaulé de diamètres D = 100 mm, d = 64 mm et de rayon de congé r = 5 mm, est soumis à une traction de force F combinée à une flexion de moment M_f et à une torsion de moment M_t. Cet arbre est en acier de limite d'élasticité σ_E = 300 MPa.

1- déterminer pour chaque chargement, le coefficient de concentration de contrainte à l'aide des formules de Neuber.
2- l'arbre est soumis à une force F=50 kN, à un moment de flexion M_f =100 m.daN et à un moment de torsion M_t =500 m.daN ; calculer la contrainte équivalente au sens de Von-Mises que l'on comparera à la limite d'élasticité
3- les chargements en traction et torsion étant fixés aux valeurs données en 2- quelle est la valeur de M_f à ne pas dépasser pour que l'arbre ne se plastifie pas ?
4- le rayon du congé de raccordement est diminué à 2 mm. L'arbre se plastifiera-t-il si on applique les chargements de 2- ? F et M_f étant fixés, quelle est la valeur de M_t à ne pas dépasser si on veut éviter une plastification de l'arbre ?

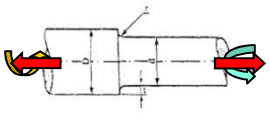


L'arbre est à gorge à fond circulaire de diamètres D = 100 mm, d = 64 mm, de rayon à fond de gorge r = 5 mm et soumis aux mêmes chargements. Mêmes questions 1, 2 et 3



1- Calcul du coefficient de concentration des contraintes

Traction : $K_t = 2,10$ Flexion : $K_t^F = 1,80$ Torsion : $K_t^T = 1,44$



2- Chargement $F = 50kN$, $M_f = 100mdaN$ et $M_t = 500mdaN$

$\sigma_E = 300MPa$

Calculs des contraintes σ_{nom} et $\sigma_{\max}$

Traction : $\sigma_{nom}^T = \dfrac{4F}{\pi d^2} = 15,54MPa$ $\sigma_{\max}^T = K_t \sigma_{nom}^T = 32,63MPa$

Flexion : $\sigma_{nom}^F = \dfrac{32M_f}{\pi d^3} = 38,86MPa$ $\sigma_{\max}^F = K_t^F \sigma_{nom}^F = 69,95MPa$

Torsion : $\tau_{nom} = \dfrac{16M_t}{\pi d^3} = 97,14MPa$ $\tau_{\max} = K_t^T \tau_{nom} = 139,88MPa$

La contrainte équivalente au sens de Von Mises, σ_{eq}^{VM}, est donnée par :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

où σ et τ sont respectivement les contraintes maximales normale et de cisaillement.
On a ainsi :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{\max}^T + \sigma_{\max}^F)^2 + 3\tau_{\max}^2} \Rightarrow \sigma_{eq}^{VM} = 263,10MPa < \sigma_E$$ pas de plastification

3- $\sigma_{\max}^T = 32,63MPa$ et $\tau_{\max} = 139,88MPa$ fixées

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{\max}^T + \sigma_{\max}^F)^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sigma_E$$

Soit $\sigma_{\max}^F = \sqrt{\sigma_E^2 - 3\tau_{\max}^2} - \sigma_{\max}^T = 144,29MPa \Rightarrow M_f = 206,3mdaN$

4- Le rayon du congé de raccordement est réduit à 2 mm

Traction : $K_t = 2,86$ Flexion : $K_t^F = 2,40$ Torsion : $K_t^T = 1,78$

Calculs des contraintes σ_{nom} et $\sigma_{\max}$ ($F = 50kN$, $M_f = 100mdaN$ et $M_t = 500mdaN$)

Traction : $\sigma_{nom}^T = \dfrac{4F}{\pi d^2} = 15,54MPa$ $\sigma_{\max}^T = K_t \sigma_{nom}^T = 44,46MPa$

Flexion : $\sigma_{nom}^F = \dfrac{32M_f}{\pi d^3} = 38,86MPa$ $\sigma_{\max}^F = K_t^F \sigma_{nom}^F = 93,26MPa$

Torsion : $\tau_{nom} = \dfrac{16M_t}{\pi d^3} = 97,14MPa$ $\tau_{\max} = K_t^T \tau_{nom} = 172,91MPa$

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{\max}^T + \sigma_{\max}^F)^2 + 3\tau_{\max}^2} \Rightarrow \sigma_{eq}^{VM} = 329,64MPa > \sigma_E$$ Plastification

$\sigma_{\max}^T$ et $\sigma_{\max}^F$ fixées

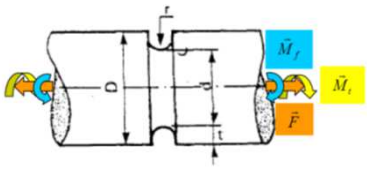
valeur de M_t à ne pas dépasser

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{\max}^T + \sigma_{\max}^F)^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sigma_E$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_E^2 - (\sigma_{\max}^T + \sigma_{\max}^F)^2}{3}} = 153,88MPa$$

$$\Rightarrow M_t = 427,65mdaN$$

Traction :	$a = 1{,}197$	$b = 1{,}871$
Flexion :	$a = 0{,}715$	$b = 2$
Torsion :	$a = 0{,}365$	$b = 1$



$$\sigma_E = 300MPa$$

1- Calcul du coefficient de concentration des contraintes

Traction : $K_t = 2{,}78$ Flexion : $K_t^F = 2{,}17$ Torsion : $K_t^T = 1{,}60$

2- Chargement $F = 50kN$, $M_f = 100mdaN$ et $M_t = 500mdaN$

Calculs des contraintes σ_{nom} et σ_{max}

Traction : $\sigma_{nom}^T = \dfrac{4F}{\pi d^2} = 15{,}54MPa$ $\quad \sigma_{max}^T = K_t \sigma_{nom}^T = 43{,}20MPa$

Flexion : $\sigma_{nom}^F = \dfrac{32M_f}{\pi d^3} = 38{,}86MPa$ $\quad \sigma_{max}^F = K_t^F \sigma_{nom}^F = 84{,}33MPa$

Torsion : $\tau_{nom} = \dfrac{16M_t}{\pi d^3} = 97{,}14MPa$ $\quad \tau_{max} = K_t^T \tau_{nom} = 155{,}42MPa$

$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{max}^T + \sigma_{max}^F)^2 + 3\tau_{max}^2} \Rightarrow \sigma_{eq}^{VM} = 297{,}88MPa < \sigma_E$ pas de plastification

3- $\sigma_{max}^T = 43{,}20MPa$ et $\tau_{max} = 155{,}42MPa$ fixées

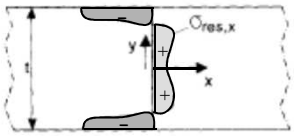
$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(\sigma_{max}^T + \sigma_{max}^F)^2 + 3\tau_{max}^2} = \sigma_E$$

$$\sigma_{max}^F = \sqrt{\sigma_E^2 - 3\tau_{max}^2} - \sigma_{max}^T = 89{,}22MPa$$

$$\Rightarrow M_f = 105{,}80mdaN$$

Influence des contraintes résiduelles sur le facteur K_t

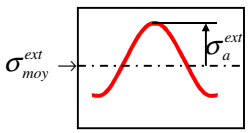
- Les contraintes résiduelles (ou internes) se référent à une distribution de contraintes faisant suite à une déformation plastique inhomogène du matériau
- Elles s'équilibrent nécessairement entre elles.
- Considérons la distribution de contraintes résiduelles suivante (dans une plaque d'épaisseur t) :



- En l'absence de chargement extérieur, l'équilibre des forces et des moments impose

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dy = 0 \qquad \int_{-t/2}^{t/2} y\sigma_x dy = 0$$

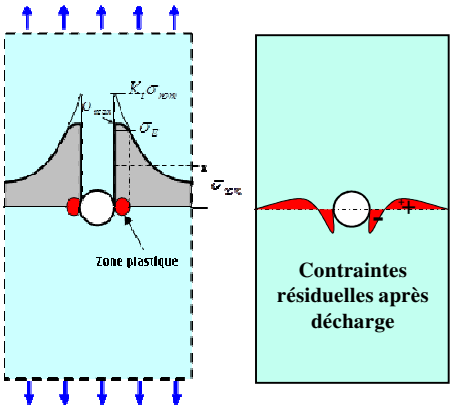
- Si on applique un chargement extérieur cyclique, on a :



$$\sigma_a = \sigma_a^{ext}$$

$$\sigma_{moy} = \sigma_{moy}^{ext} + \sigma_{res}$$

- Les contraintes résiduelles font suite donc à une déformation plastique qui peut avoir différentes origines:
  - déformation inhomogène près d'une entaille
  - procédés de fabrication induisant des contraintes résiduelles (forgeage, emboutissage …)
  - traitement thermique
  - assemblage de composants d'une structure …
- Considérons par exemple une plaque percée d'un trou circulaire que l'on charge à $\sigma_{max}>\sigma_E$:



$$\sigma_{\max} < K_t \sigma_{\text{nom}}$$

- Lors de la décharge, le reste de la plaque demeuré élastique, va venir comprimer la zone plastifiée qui s'est déformée elle de façon permanente
- Les contraintes résiduelles ainsi générées vont s'équilibrer

Estimation des contraintes résiduelles – Hypothèse de Neuber

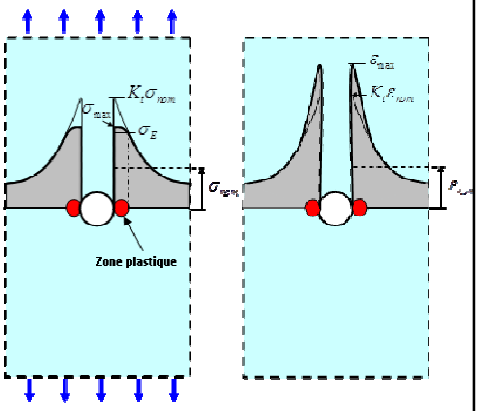
- Lorsque les contraintes maximales restent inférieures à la limite d'élasticité, les déformations sont proportionnelles à ces contraintes et on a :

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{nom} \qquad \varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{K_t \sigma_{nom}}{E} = K_t \varepsilon_{nom}$$

- Si en revanche, les contraintes maximales dépassent la limite d'élasticité, on a alors :

$$\sigma_{\max} < K_t \sigma_{nom} \qquad \varepsilon_{\max} > K_t \varepsilon_{nom}$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} < K_t \qquad K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{nom}} > K_t$$



- ***Hypothèse de Neuber (ou Règle de Neuber)***

$$K_\sigma K_\varepsilon = K_t^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} \varepsilon_{\max} = \frac{(K_t \sigma_{nom})^2}{E}$$

$$\sigma_{\max}\varepsilon_{\max} = \frac{\left(K_t\sigma_{nom}\right)^2}{E}$$

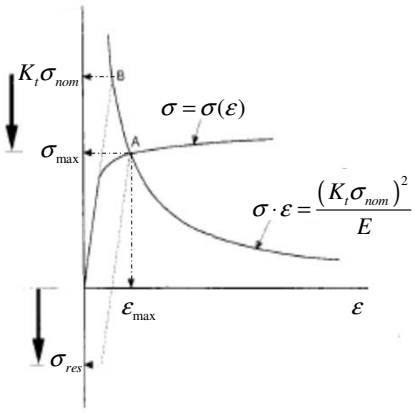
- Le terme de droite de cette relation est connu.

On détermine ensuite graphiquement la valeur de σ_{max} à partir de la loi de comportement $\sigma=\sigma(\varepsilon)$.

- Au point A d'intersection des deux courbes $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ et $\sigma.\varepsilon$, σ_{max} et ε_{max} satisfont la relation de comportement.

En absence de plasticité, la contrainte maximale est donnée par le point B.

La différence entre σ_{max} et $K_t\sigma_{nom}$ donne la contrainte résiduelle σ_{res} de compression



$$\sigma_{res} = \sigma_A - \sigma_B = \sigma_A - K_t\sigma_{nom}$$

- Procédure de détermination graphique des contraintes σ_{max} et σ_{res}

TD7 : calculs de contraintes résiduelles

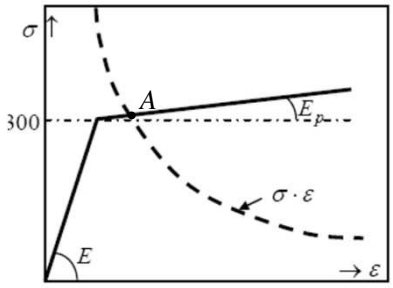
Une plaque en acier de module d'Young $E = 210000MPa$ et de limite d'élasticité $\sigma_E = 300MPa$ a un comportement plastique bilinéaire avec un module plastique $E_p = E/20$.

1- Calculer les contraintes résiduelle et maximale au voisinage d'une entaille de $K_t = 2,5$ sachant que la plaque est sollicitée à $\sigma^{\text{nom}} = 200MPa$ et déchargée ensuite. En déduire les facteurs de concentration K_σ et K_ε

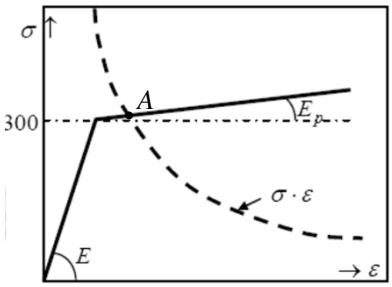
2- Même question que 1- avec des entailles de $K_t = 2$ et $K_t = 3$

Loi de comportement $\sigma - \sigma_E = E_p(\varepsilon - \varepsilon_E)$

Au point A $\sigma_A = 300 + \frac{E}{20}(\varepsilon_A - \frac{300}{E})$



Au point A $\sigma_A = 300 + \frac{E}{20}(\varepsilon_A - \frac{300}{E})$



HN $\sigma_A \cdot \varepsilon_A = \frac{(K_t \sigma_{nom})^2}{E} \Rightarrow \sigma_A = 300 + \frac{E}{20}(\frac{(K_t \sigma_{nom})^2}{\sigma_A E} - \frac{300}{E})$

$\sigma_A^2 - 285\sigma_A - 12500 = 0 \quad \Rightarrow \sigma_A = 323,62MPa$

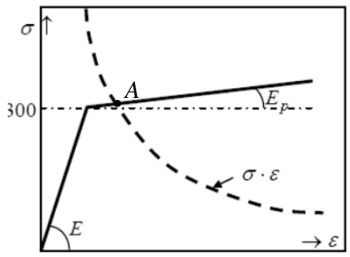
$\sigma_{res} = \sigma_A - K_t \sigma_{nom} \quad \Rightarrow \sigma_{res} = -176,4MPa$

$K_\sigma = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}} = 1,62$

$K_\varepsilon = \frac{K_t^2}{K_\sigma} = 3,86$

Au point A $\sigma_A = 300 + \frac{E}{20}(\varepsilon_A - \frac{300}{E})$

HN $\Rightarrow \sigma_A = 300 + \frac{E}{20}(\frac{(K_t \sigma_{nom})^2}{\sigma_A E} - \frac{300}{E})$



2a) $K_t = 2$ et $\sigma_{nom} = 200MPa$

$\sigma_A^2 - 285\sigma_A - 8000 = 0 \quad \Rightarrow \sigma_A = 310,74MPa$

$\sigma_{res} = \sigma_A - K_t \sigma_{nom} \quad \Rightarrow \sigma_{res} = -89,26MPa$

$K_\sigma = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}} = 1,55$

$K_\varepsilon = \frac{K_t^2}{K_\sigma} = 2,57$

2b) $K_t = 3$ et $\sigma_{nom} = 200MPa$

$\sigma_A^2 - 285\sigma_A - 18000 = 0 \quad \Rightarrow \sigma_A = 338,22MPa$

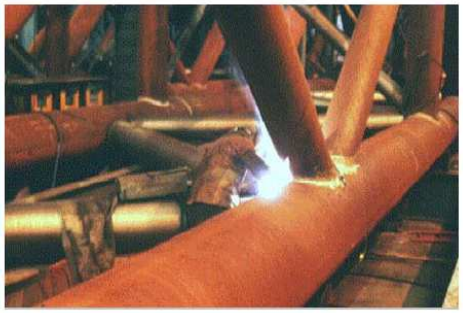
$\sigma_{res} = \sigma_A - K_t \sigma_{nom} \quad \Rightarrow \sigma_{res} = -261,78MPa$

$K_\sigma = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}} = 1,69$

$K_\varepsilon = \frac{K_t^2}{K_\sigma} = 5,32$

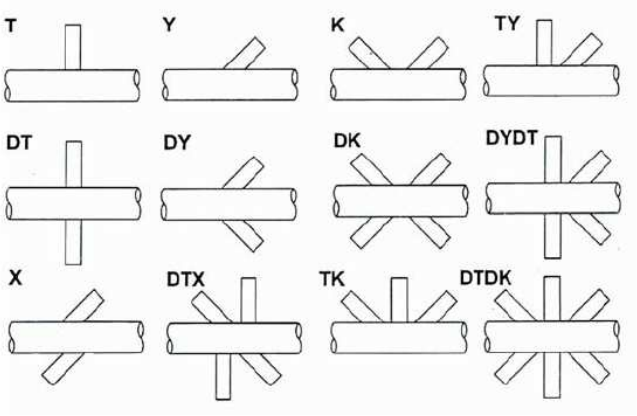
Facteur K_t dans les structures complexes

Les jonctions tubulaires des plateformes offshore sont des exemples de structures complexes (figure ci-dessous). Ces plateformes sont constituées de tubes soudés entre eux, constituant des jonctions tubulaires. Les intersections complexes de ces jonctions représentent des discontinuités structurales conduisant à de fortes concentrations de contrainte dans les cordons de soudure.

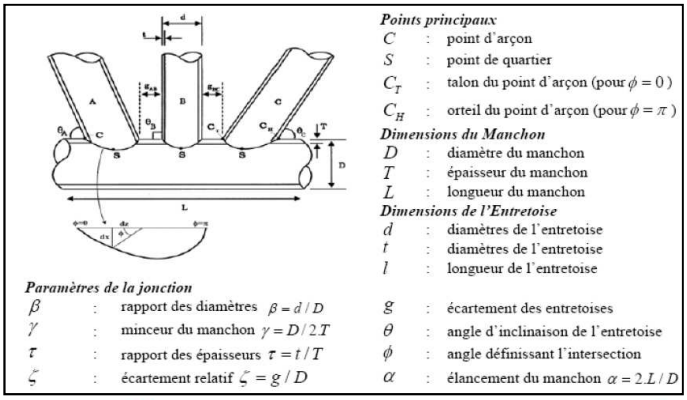


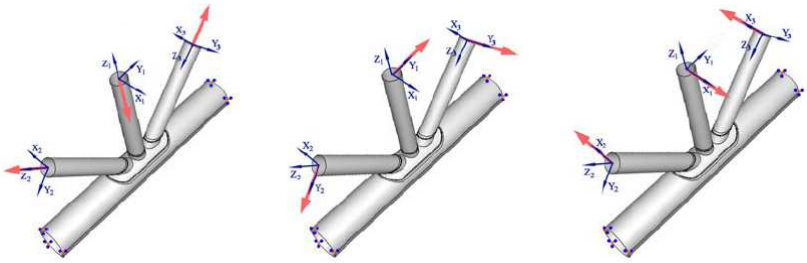
Eoliennes Offshore - Allemagne

Ces jonctions tubulaires sont classées selon leur forme en types T, Y, K … schématisés ci-dessous.

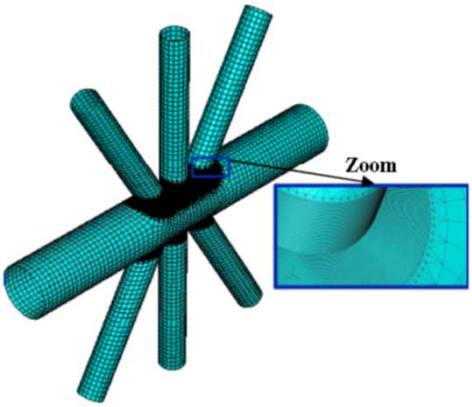


L'étude de ces jonctions nécessite un paramétrage indiqué ci-dessous pour une jonction de type K qui correspond au cas le plus général.
Le manchon de la jonction étant encastré à ses deux extrémités, les chargement appliqués sont également indiqués dans la figure ci-dessous.





Les calculs du facteur K_t dans ces jonctions utilisent la technique des éléments finis. La grande difficulté lorsqu'on modélise ces jonctions est la génération des mailles dans les zones de discontinuités géométriques où les gradients de contrainte sont importants. La montre figure ci-dessous montre un exemple.

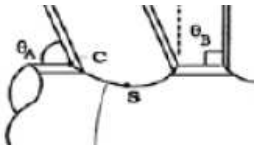


Maillage d'une jonction DTDK

Des relations paramétriques très utilisées dans l'industrie offshore pour le calcul du K_t dans les jonctions de type T, Y, X, K … sont proposées par Efthymiou et Lloyd[8]. Ces relations utilisent les paramètres indiqués précédemment. Pour les jonctions de type Y, les relations donnant le K_t au point de quartier du manchon, sont:

- Efthymiou $K_t = F_1 \cdot \left(1{,}11 - 3(2{,}12 - 2\beta)^2\right)\tau^{1{,}1}\gamma \sin^{1{,}6}\theta$

- Lloyd $K_t = F_1 \cdot (2{,}12 - 2\beta)\beta\tau\gamma^{1{,}2}\sin^2\theta$



avec

$$F_1 = \begin{cases} 1 - \left(0{,}83\beta - 0{,}56\beta^2 - 0{,}02\right)\gamma^{0{,}23}\exp\left[-0{,}21\gamma^{-1{,}16}\alpha^{2{,}5}\right] & \text{pour } \alpha < 12 \\ 1 & \text{pour } \alpha \geq 12 \end{cases}$$

Llyod's Register of Shiping, « Stress concentration factors for simple tubular joints, HSE books, 1997