Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 5 – Application de la MLR à la fatigue des matériaux

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

1

SOMMAIRE

- Introduction
- Endurance en fatigue
- Endommagement par fatigue
- Fissuration par fatigue
- Endommagement en propagation par fatigue
- Fermeture de fissure en bas de cycle de fatigue
- Propagation des fissures courtes en fatigue
- Applications : calculs des durées de vie en fatigue

TD15 : Calcul de durée de vie en fatigue à partir des courbes de propagation

1- Dans un élément de structure en acier de ténacité K_{IC}=70$MPa\sqrt{m}$, les essais de propagation, à partir d'une longueur initiale a_0=0,2mm, ont donné les résultats suivants :

$$\frac{da}{dN} = 7,72\cdot 10^{-11}\Delta K_R^{2,3} \text{ où } \Delta K_R = \frac{1-bR}{1-R}\Delta K \text{ avec } \begin{cases} b = 0,2 & \text{à } R<0 \\ b = 1 & \text{à } R \geq 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} da/dN & \text{en } m/cycle \\ \Delta K & \text{en } MPa\sqrt{m} \end{cases}$$

Pour le calcul du FIC, on adopte la relation $K = \sigma\sqrt{\pi a}$

Un lot d'éléments identiques subissent, après amorçage d'une fissure de longueur a_0, différents chargements. Déterminer la durée de vie N_P pour les chargements suivants :

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ b- $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$
c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$
d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa$ - $R = -0,5$

• La durée de vie se calcule par intégration entre la longueur initiale $a_0 = 0,2mm$ et une longueur critique a_c qu'il convient de déterminer pour chaque chargement considéré :

$$K_{I_C} = \sigma_{\max}\sqrt{\pi a_c} = \frac{\Delta\sigma}{1-R}\sqrt{\pi a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(1-R)K_{I_C}}{\Delta\sigma}\right)^2$$

$\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ $\Rightarrow a_c = 39,0mm$,
$\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$ $\Rightarrow a_c = 48,1mm$,
$\Delta\sigma = 150MPa$ - $R = 0,5$ $\Rightarrow a_c = 17,3mm$,
$\Delta\sigma = 300MPa$ - $R = -0,5$ $\Rightarrow a_c = 39,0mm$.

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ $\quad \frac{da}{dN} = 7,72\cdot 10^{-11}\left(200\sqrt{\pi a}\right)^{2,3} = C_1 a^{1,15}$ où $C_1 = 5,65\cdot 10^{-5}$

$$N_P = \int_{0,2\cdot 10^{-3}}^{39\cdot 10^{-3}} \frac{da}{C_1 a^{1,15}} = \frac{1}{0,15C_1}\left(\frac{1}{\left(0,2\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(39\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \Rightarrow N_P = 2,32\cdot 10^5 cycles$$

b- $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$ $\quad \frac{da}{dN} = 7,72\cdot 10^{-11}\left(0,6\cdot 360\sqrt{\pi a}\right)^{2,3} = C_2 a^{1,15}$

où $C_2 = 6,74\cdot 10^{-5}$

$$N_P = \frac{1}{0,15C_2}\left(\frac{1}{\left(0,2\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(48,1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \Rightarrow N_P = 1,99\cdot 10^5 cycles$$

c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$; on calcule la vitesse moyenne sur le spectre, soit :

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy} = 7,72\cdot 10^{-11}\left(\frac{200^{2,3} + 2(0,6\cdot 360)^{2,3}}{3}\right)\pi^{1,15}a^{1,15} = C_3 a^{1,15} \text{ où } C_3 = 6,37\cdot 10^{-5}$$

$$N_P = \frac{1}{0,15C_3}\left(\frac{1}{\left(0,2\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(39\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \qquad \Rightarrow N_P = 2,05\cdot 10^5 cycles$$

d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa$ - $R = -0,5$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy} = 7,72\cdot 10^{-11}\left(\frac{3\cdot 150^{2,3} + 5(\frac{1,1}{1,5}\cdot 300)^{2,3}}{8}\right)\pi^{1,15}a^{1,15} = C_4 a^{1,15} \text{ où } C_4 = 5,49\cdot 10^{-5}$$

$$N_P = \frac{1}{0,15C_4}\left(\frac{1}{\left(0,2\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(17,3\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \qquad \Rightarrow N_P = 2,13\cdot 10^5 cycles$$

2- La propagation en fatigue dans l'acier de l'exemple précédent est plus rapide pour les fissures courtes (0,2*mm*<*a*<1*mm*). La loi de fissuration pour le régime fissures courtes (*FC*) est :

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9}\left(\Delta K_R^{FC}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta K_R^{FC} = \left(\frac{\Delta K}{1-cR}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = 1 & \text{à } R < 0 \\ c = 0 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

Mêmes questions que celles de l'exemple **1-**

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ b- $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$
c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$
d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa$ - $R = -0,5$

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ $\quad \left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9}\left(200\sqrt{\pi a}\right)^2 = C_1' a$ où $C_1' = 1,26\cdot 10^{-4}$

$$N_P = \int_{0,2\cdot 10^{-3}}^{1\cdot 10^{-3}} \frac{da}{C_1' a} + \int_{1\cdot 10^{-3}}^{39\cdot 10^{-3}} \frac{da}{C_1 a^{1,15}} = \frac{1}{C_1'}\ln\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_1}\left(\frac{1}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(39\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right)$$

$$\Rightarrow N_P = 1,53\cdot 10^5 cycles$$

b- $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$ $\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9}\left(\frac{360}{2}\sqrt{\pi a}\right)^2 = C_2^{'}a$ où $C_2^{'} = 1,02\cdot 10^{-4}$

$$N_P = \frac{1}{C_2^{'}}\ln\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_2}\left(\frac{1}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(48,1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \quad \Rightarrow N_P = 1,39\cdot 10^5 cycles$$

c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R = -1$; on calcule la vitesse moyenne sur le spectre pour les deux lois de propagation (fissures courtes et longues), soit :

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9}\left(\frac{200^2 + 2(360/2)^2}{3}\right)\pi a = C_3^{'}a \text{ où } C_3^{'} = 1,10\cdot 10^{-4}$$

$$N_P = \frac{1}{C_3^{'}}\ln\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_3}\left(\frac{1}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(39\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \quad \Rightarrow N_P = 1,39\cdot 10^5 cycles$$

d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa$ - $R = -0,5$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9}\left(\frac{3\cdot 150^2 + 5(300/1,5)^2}{8}\right)\pi a = C_4^{'}a \text{ où } C_4^{'} = 1,05\cdot 10^{-4}$$

$$N_P = \frac{1}{C_4^{'}}\ln\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_4}\left(\frac{1}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(17,3\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right) \quad \Rightarrow N_P = 1,34\cdot 10^5 cycles$$

3- L'acier précédent présente un seuil de non fissuration ΔK_{seuil}.
Mêmes question que celles de **2-**

$$\Delta K_{seuil} = 4,5 MPa\sqrt{m}$$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9}\left(\Delta K_R^{FC}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta K_R^{FC} = \left(\frac{\Delta K}{1-cR}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} c=1 & \text{à } R<0 \\ c=0 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{da}{dN} = 7,72\cdot 10^{-11}\Delta K_R^{2,3} \quad \text{où } \Delta K_R = \frac{1-bR}{1-R}\Delta K \quad \text{avec} \begin{cases} b=0,2 & \text{à } R<0 \\ b=1 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R=0$ b- $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R=-1$
c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R=0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa$ - $R=-1$
d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R=0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa$ - $R=-0,5$

Il faut s'assurer que les chargements sont endommageants pour la longueur de fissure initiale $a_0 = 0,2mm$, c'est-à-dire que $\Delta K_R^{FC}(a=a_0) > \Delta K_{seuil}$.

a- $\Delta\sigma = 200MPa$ - $R=0$ $\Delta K_R^{FC}(a_0) = 200\sqrt{\pi a_0} = 5,01MPa\sqrt{m} > \Delta K_{seuil}$, donc pas de changement par rapport à l'exemple 3 (même durée de vie). Il en est de même pour b- et c- ($180\sqrt{\pi a_0} = 4,51MPa\sqrt{m} > \Delta K_{seuil}$)

d- $\Delta\sigma = 150MPa$ - $R=0,5$ $\Delta K_R^{FC}(a_0) = 150\sqrt{\pi a_0} = 3,76MPa\sqrt{m} < \Delta K_{seuil}$; ce niveau devient endommageant pour une longueur a_1 telle que $150\sqrt{\pi a_1} = \Delta K_{seuil}$, soit $a_1 = 0,286mm$.

$\Delta\sigma = 300MPa$ - $R=-0,5$ $\Delta K_R^{FC}(a_0) = \frac{300}{1,5}\sqrt{\pi a_0} = 5,01MPa\sqrt{m} > \Delta K_{seuil}$.

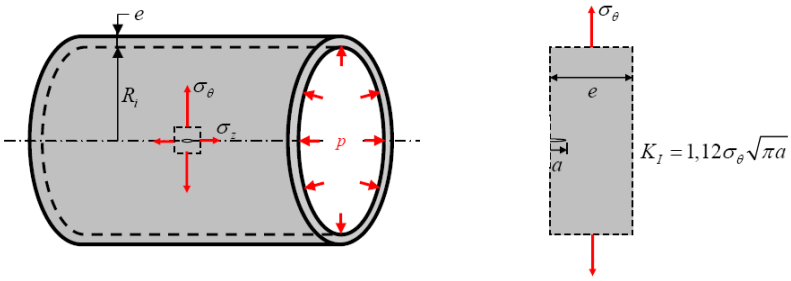
Pour $a_0 < a < a_1$, $\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9}\left(\frac{5(300/1,5)^2}{8}\right)\pi a = C_4^{''}a$ avec $C_4^{''} = 7,85\cdot 10^{-5}$

Pour $a_1 < a < 1mm$, $\left.\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9}\left(\frac{3\cdot 150^2 + 5(300/1,5)^2}{8}\right)\pi a = C_4^{'}a$

$$N_P = \frac{1}{C_4^{''}}\ln\frac{0,286}{0,2} + \frac{1}{C_4^{'}}\ln\frac{1}{0,286} + \frac{1}{0,15C_4}\left(\frac{1}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}} - \frac{1}{\left(17,3\cdot 10^{-3}\right)^{0,15}}\right)$$

$$\Rightarrow N_P = 1,36\cdot 10^5 \, cycles$$

4- Un réservoir cylindrique de rayon intérieur R_i=1m et d'épaisseur e=4cm, est soumis à une pression interne p (figure ci-dessous). Le dimensionnement devra assurer à la fois un comportement élastique du réservoir et une résistance à la propagation brutale d'une éventuelle fissure; on prendra comme coefficient de sécurité C_s=2.



La fabrication du réservoir peut se faire avec trois aciers (A, B, C) dont les valeurs de la limite d'élasticité σ_E et de la ténacité K_{I_C} sont :

Aciers	$\sigma_E(MPa)$	$K_{I_C}(MPa\sqrt{m})$
A : 4340	**866**	**99,3**
B : 4335	**1299**	**72,9**
C : Maraging	**1732**	**56,1**

a- Le critère pour le dimensionnement en contraintes, qui fait abstraction de l'existence d'éventuelles fissures, est celui de Mises :

$$\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z^2 = \left(\frac{\sigma_E}{C_s}\right)^2$$

Déterminer en fonction de σ_E, R_i et e, la pression admissible p_{adm}.
Donner la valeur de p_{adm} pour chacun des aciers.

b- Le dimensionnement en rupture qui tient compte de l'existence d'une éventuelle fissure de profondeur a, est :

$$K_I \le K_{I_C} / C_s$$

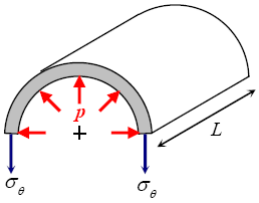
Donner l'expression de la pression admissible p_{adm} en fonction de la profondeur fissurée a et de K_{I_C}. Pour quelles longueurs de fissure a_0, les deux dimensionnements sont-ils équivalents ?
Représenter schématiquement dans un diagramme p en fonction de a, le domaine de sécurité pour chacun des 3 aciers.

c- Après fabrication, le cylindre subit un contrôle non destructif dont la limite de détection est $a_{LD} = 2mm$. Il est ensuite soumis, pour le test de résistance, à une pression ultime $P_u = 32MPa$.
Quels aciers faut-il choisir pour éviter l'éclatement en cours de test ?

a- On calcule dans un premier temps les contraintes σ_θ et σ_z en fonction de la pression p et des dimensions du réservoir :

$$\sigma_\theta 2eL = p2R_iL \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{pR_i}{e}$$

$$\sigma_z 2\pi R_i e = p\pi R_i^2 \Rightarrow \sigma_z = \frac{pR_i}{2e} = \frac{\sigma_\theta}{2}$$



Le critère de Mises $\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_E^2/4$ donne :

$$\left(\frac{p_{adm}R_i}{e}\right)^2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = \frac{\sigma_E^2}{4} \quad \text{soit} \quad p_{adm} = \frac{e}{\sqrt{3}R_i}\sigma_E = 2,31\cdot 10^{-2}\sigma_E$$

Aciers	$\sigma_E(MPa)$
A : 4340	**866**
B : 4335	**1299**
C : Maraging	**1732**

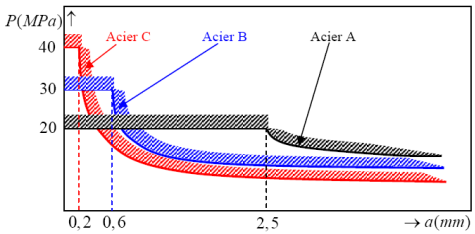
$p_{adm}^{\text{Acier A}} = 20MPa$ $\quad$ $p_{adm}^{\text{Acier B}} = 30MPa$ $\quad$ $p_{adm}^{\text{Acier C}} = 40MPa$

b- $K_I = 1,12\sigma_\theta\sqrt{\pi a} = 1,12\frac{pR_i}{e}\sqrt{\pi a}$. La pression admissible est atteinte lorsque $K_I = \frac{K_{I_C}}{2}$, soit : $1,12\frac{p_{adm}R_i}{e}\sqrt{\pi a} = \frac{K_{I_C}}{2} \Rightarrow p_{adm} = \frac{e}{2,24\sqrt{\pi}R_i}\frac{K_{I_C}}{\sqrt{a}} = 1,01\cdot 10^{-2}\frac{K_{I_C}}{\sqrt{a}}$

Les dimensionnements (en contrainte et en rupture) sont équivalents lorsque :

$$p_{adm} = \frac{e}{2,24\sqrt{\pi}R_i}\frac{K_{I_C}}{\sqrt{a_0}} = \frac{e}{\sqrt{3}R_i}\sigma_E \Rightarrow a_0 = \frac{3}{\pi}\left(\frac{K_{I_C}}{2,24\sigma_E}\right)^2 = 1,90\cdot 10^{-1}\left(\frac{K_{I_C}}{\sigma_E}\right)^2$$

$a_0^{\text{Acier A}} = 2,5mm$ $\quad$ $a_0^{\text{Acier B}} = 0,6mm$ $\quad$ $a_0^{\text{Acier C}} = 0,2mm$



Aciers	$\sigma_E(MPa)$	$K_{I_C}(MPa\sqrt{m})$
A : 4340	**866**	**99,3**
B : 4335	**1299**	**72,9**
C : Maraging	**1732**	**56,1**

c- $P_u = 32MPa \Rightarrow \sigma_{\theta u} = \dfrac{P_u R_i}{e} = 800MPa < \sigma_E$, les 3 aciers restent dans le domaine élastique.

Aciers	$\sigma_E(MPa)$	$K_{I_C}(MPa\sqrt{m})$
A : 4340	**866**	**99,3**
B : 4335	**1299**	**72,9**
C : Maraging	**1732**	**56,1**

L'éclatement se produit lorsque $K_I = K_{I_C}$, c'est-à-dire lorsque $1{,}12\sigma_{\theta u}\sqrt{\pi a_c} = K_{I_C}$, soit :

$$a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{I_C}}{1{,}12\sigma_{\theta u}}\right)^2 \Rightarrow a_c(m) = 3{,}96\cdot 10^{-7}\left(K_{I_C}(MPa\sqrt{m})\right)^2$$

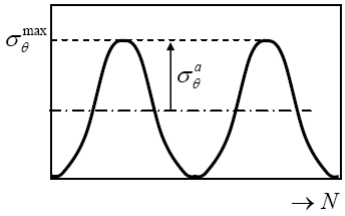
$a_c^{\text{Acier A}} = 3{,}91mm$ $\quad a_c^{\text{Acier B}} = 2{,}11mm$ $\quad a_c^{\text{Acier C}} = 1{,}25mm$ $\quad a_{LD} = 2mm$

$a_c^{\text{Acier C}} < a_{LD} = 2mm$, l'acier C risque d'éclater au cours du test.

Bon choix : Aciers A et B

5- Le cylindre précédent est fabriqué avec l'acier 4340, dont la courbe de Wöhler pour amorcer une fissure de fatigue a_i=0,5mm au bout de N_a cycles (à un rapport de charge R=0) est donnée par :

$$N_a = \frac{5.10^7}{\left(\sigma_\theta^a - \sigma_D\right)^2} \qquad \sigma_D = 300MPa$$



$$\sigma_\theta^a = \frac{\sigma_\theta^{max}}{2}$$

a- Calculer les nombres de cycles à l'amorçage N_{a1} si on charge le cylindre cycliquement entre $P = 0$ et $P_1 = 32MPa$.

a- $N_a = \dfrac{5.10^7}{\left(\sigma_\theta^a - \sigma_D\right)^2}$ avec $\sigma_{\theta 1}^a = \dfrac{P_1 R_i}{2e} = 400MPa \Rightarrow N_{a1} = \dfrac{5.10^7}{(400-300)^2} = 5000$ cycles

b- Le cylindre subit 2 fois par jour le chargement précédent pendant 3 ans ; on le charge ensuite toujours 2 fois par jour entre $P = 0$ et $P_2 = 30MPa$. Calculer, en utilisant la loi de cumul de Miner, le nombre de jours restant avant amorçage.

b- Le cylindre subit 2 cycles de chargement de $P = 0$ à $P_1 = 32MPa$ pendant 3 ans, soit $n_1 = 2190cycles$. L'endommagement associé est : $D_1 = \frac{n_1}{N_{a1}} = \frac{2190}{5000} = 0,438$.

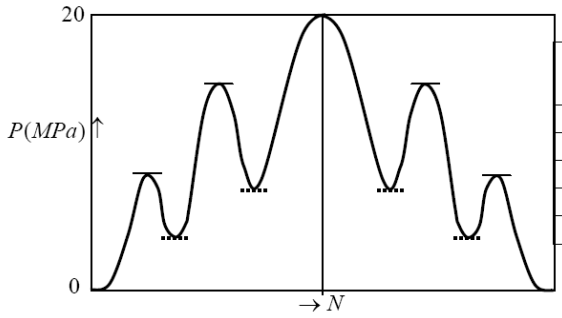
Le cylindre est ensuite soumis au chargement de $P = 0$ à $P_2 = 30MPa$, d'où $\sigma_{\theta 2}^{a} = \frac{P_2 R_i}{2e}$ soit $\sigma_{\theta 2}^{a} = 375MPa$. La règle de Miner donne : $\frac{n_1}{N_{a1}} + \frac{n_2}{N_{a2}} = 1$ avec $N_{a2} = \frac{5.10^7}{\left(\sigma_{\theta 2}^{a} - \sigma_D\right)^2}$, soit $N_{a2} = 8889cycles$. Le nombre de cycles résiduels n_2 s'écrit donc :

$n_2 = N_{a2}\left(1 - \frac{n_1}{N_{a1}}\right) = 4996cycles$ ce qui correspond à 2498 jours soit 6 ans, 10 mois et 8 jours.

c- Déterminer pour un chargement $P = 0 \rightarrow 20MPa$, la longueur critique à rupture et la durée de vie en propagation N_P.

d- Calculer la durée de vie N_P sachant que le chargement est composé de 1 cycle $P = 0 \rightarrow 20MPa$ et de 2 cycles $P = 0 \rightarrow 16MPa$.

e- Le spectre de chargement est indiqué sur la figure ci-dessous. Calculer la durée de vie en remplaçant dans les lois de fissuration ΔK par sa valeur moyenne sur le spectre $\Delta K_{mS} = 1,12\left(\sigma_{mS}^{\min} - \sigma_{mS}^{\max}\right)\sqrt{\pi a}$ où $\sigma_{mS}^{\min} = \frac{R}{e}\sqrt{\frac{1}{5}\sum p_{\min}^2}$ et $\sigma_{mS}^{\max} = \frac{R}{e}\sqrt{\frac{1}{5}\sum p_{\max}^2}$, et R par $R_{mS} = \frac{\sigma_{mS}^{\min}}{\sigma_{mS}^{\max}}$. $\left.\frac{da}{dn}\right)_{FC} = 10^{-10}\Delta K^2 \quad 0,5mm < a < 1,5mm$ $\left.\frac{da}{dn}\right)_{FL} = 10^{-13}\Delta K^4$



$P_{\max}(MPa)$ —	$P_{\min}(MPa)$ .....
8	0
15	4
20	7,4
15	7,4
8	4

c- $K_{\max} = K_{I_C} = 1{,}12\sigma_\theta^{\max}\sqrt{\pi a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{I_C}}{1{,}12\sigma_\theta^{\max}}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{eK_{I_C}}{1{,}12P_{\max}R_i}\right)^2 = 9{,}77mm$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-10}\Delta K^2 = 10^{-10}\left(1{,}12\Delta\sigma_\theta\sqrt{\pi a}\right)^2 = 10^{-10}\left(1{,}12\frac{R_i\Delta P}{e}\sqrt{\pi a}\right)^2$$

soit

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC} = C_1 a \quad \text{avec} \quad C_1 = 9{,}85\cdot 10^{-5}$$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FL} = 10^{-13}\Delta K^4 = 10^{-13}\left(1{,}12\Delta\sigma_\theta\sqrt{\pi a}\right)^4 = C_2 a^2 \quad \text{avec} \quad C_2 = 9{,}71\cdot 10^{-2}$$

et

$$N_P = \frac{1}{C_1}\int_{0{,}5\cdot 10^{-3}}^{1{,}5\cdot 10^{-3}}\frac{da}{a} + \frac{1}{C_2}\int_{1{,}5\cdot 10^{-3}}^{9{,}77\cdot 10^{-3}}\frac{da}{a^2} \Rightarrow N_P = \frac{1}{C_1}\ln\frac{1{,}5}{0{,}5} + \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-3}} - \frac{1}{9{,}77\cdot 10^{-3}}\right)$$

soit

$$N_P = 1{,}70\cdot 10^4 cycles$$

d- $$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{\text{moy}} = 10^{-10}\left(1{,}12\frac{R_i}{e}\sqrt{\pi}\right)^2\frac{20^2 + 2\cdot 16^2}{3}a = C_3 a \quad \text{avec} \quad C_3 = 7{,}49\cdot 10^{-5}$$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{\text{moy}} = 10^{-13}\left(1{,}12\frac{R_i}{e}\sqrt{\pi}\right)^4\frac{20^4 + 2\cdot 16^4}{3}a^2 = C_4 a^2 \quad \text{avec} \quad C_4 = 5{,}89\cdot 10^{-2}$$

et

$$N_P = \frac{1}{C_3}\ln\frac{1{,}5}{0{,}5} + \frac{1}{C_4}\left(\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-3}} - \frac{1}{9{,}77\cdot 10^{-3}}\right) \quad \text{soit} \quad N_P = 2{,}42\cdot 10^4 cycles$$

e- $$\sigma_{mS}^{\min} = \frac{R}{e}\sqrt{\frac{1}{5}\sum p_{\min}^2} = 25\sqrt{\frac{1}{5}\left(4^2 + (7{,}4)^2 + 4^2 + (7{,}4)^2\right)} \Rightarrow \sigma_{mS}^{\min} = 1{,}33\cdot 10^2 MPa$$

$$\sigma_{mS}^{\max} = \frac{R}{e}\sqrt{\frac{1}{5}\sum p_{\max}^2} = 25\sqrt{\frac{1}{5}\left(2\cdot 8^2 + 2\cdot 15^2 + 20^2\right)} \Rightarrow \sigma_{mS}^{\max} = 3{,}50\cdot 10^2 MPa$$

$$\Delta\sigma_{mS} = \left(\sigma_{mS}^{\max} - \sigma_{mS}^{\min}\right) = 2{,}17\cdot 10^2 MPa$$

$$R_{mS} = \frac{\sigma_{mS}^{\min}}{\sigma_{mS}^{\max}} = 0{,}38$$

$P_{\max}(MPa)$ —	$P_{\min}(MPa)$ .....
8	0
15	4
20	7,4
15	7,4
8	4

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = 10^{-10}\left(1,12\cdot 217\cdot\sqrt{\pi}\right)^2 a = C_5 a \qquad \text{avec} \qquad C_5 = 1,86\cdot 10^{-5}$$

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{moy} = 10^{-13}\left((1-R_{mS})\Delta K_{mS}\right)^4 = 10^{-13}\left(1,12\cdot(1-0,38)\cdot 217\sqrt{\pi a}\right)^4 = C_6 a^2 \qquad C_6 = 5,09\cdot 10^{-4}$$

$$N_P = \frac{1}{C_5}\ln\frac{1,5}{0,5} + \frac{1}{C_6}\left(\frac{1}{1,5\cdot 10^{-3}} - \frac{1}{9,77\cdot 10^{-3}}\right) \quad \text{soit} \quad N_p = 1,17\cdot 10^6\, cycles$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

enim École nationale d'ingénieurs de Metz

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 6 –Fatigue de contact de roulement

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

SOMMAIRE

- Introduction
- Théorie de Hertz
- Mécanique du contact en élasticité plane
- Contact linéaire roue-rail
- Comportement du matériau
- Modèles d'endommagement
- Calculs par éléments finis de la durée de vie en FCR

Introduction

Toutes les études pour déterminer les champs de contraintes et/ou de déplacements dans un solide soumis à des efforts de contact, s'appuient sur le travail initial de Hertz en 1882 sur le contact de deux solides élastiques sans frottement.

Hypothèses de la théorie de Hertz

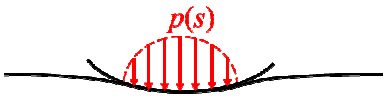
- Comportement élastique du matériau
- Continuité des surfaces de contact (absence de rugosité)
- Faibles dimensions de la surface de contact par rapport à celles des solides en contact

Heinrich Hertz 1857-1894

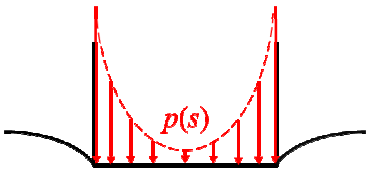
Malgré ces restrictions, la théorie de Hertz a été étendue au contact inélastique avec frottement.

La présentation de la mécanique de contact dans ce chapitre, sera limitée au contact de deux solides élastiques avec ou sans frottement.

On peut discerner qualitativement deux types de contact



a- Contact incomplet



b- Contact complet

- Roulement à billes
- Engrenages
- Roue et rail dans les systèmes ferroviaires

Principale caractéristique

L'effort de contact s'annule à la frontières de la zone de contact

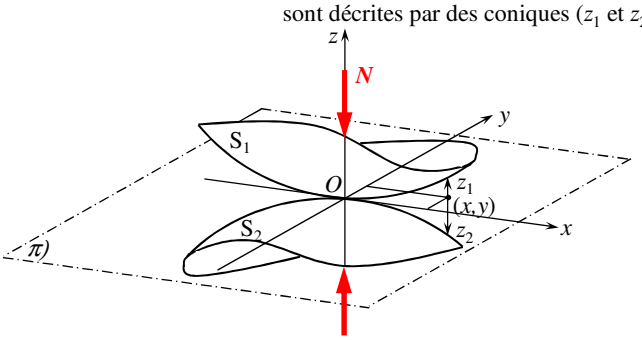
Opérations de poinçonnage ou d'emboutissage avec des solides plats

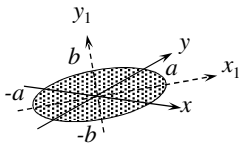
Principale caractéristique

La pression de contact présente une singularité aux bords de la zone de contact

Théorie de Hertz

Contact de solides élastiques (S_1 et S_2) de forme convexe, dont les surfaces enveloppes sont décrites par des coniques (z_1 et z_2).





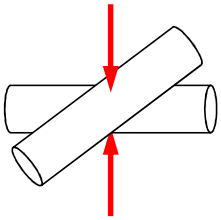
Surface de contact elliptique

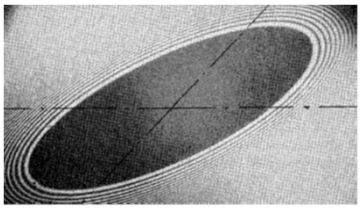
Hertz (1882) adopta l'hypothèse d'une surface de contact elliptique dans le plan tangent (π)

Hertz a utilisé la méthode développée par Newton

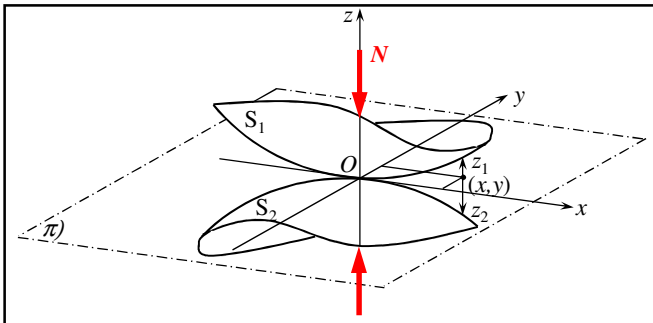
Figure d'interférence obtenue par Newton : les anneaux concentriques sont centrés sur le point de contact d'une lentille sphérique avec une surface plane.

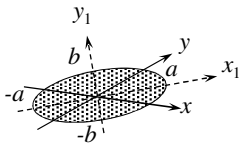
L'hypothèse de Hertz d'une surface de contact de forme elliptique repose sur des observations expérimentales.





Franges d'interférence observées dans le contact de deux cylindres d'axes non parallèles. (Cylindres d'axes faisant un angle de 45° entre eux)





Surface de contact elliptique

Les coniques décrivant les surfaces enveloppes sont de la forme

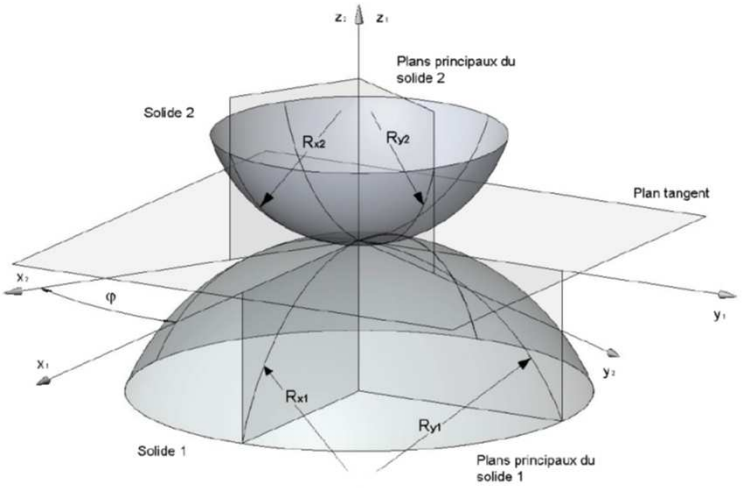
$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Fy + G$$

En coupant ces coniques par des plans z=±h/2, on obtient, moyennant le choix des axes x_1 et y_1, des ellipses :

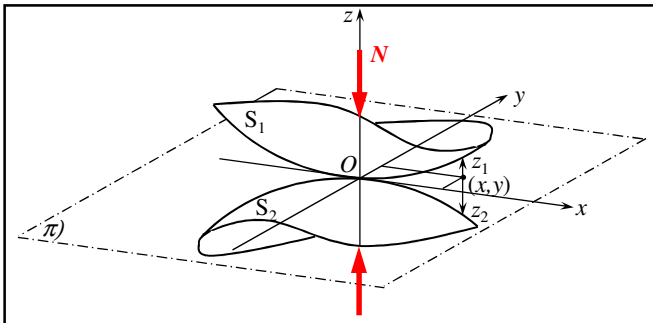
$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_{x1}} + \frac{y_1^2}{2R_{y1}} \qquad z_2 = -\left(\frac{x_1^2}{2R_{x2}} + \frac{y_1^2}{2R_{y2}}\right)$$

R_{x1}, R_{y1}, R_{x2} et R_{y2}, rayons de courbures principaux en O des surfaces enveloppes de S_1 et S_2.

Définition des rayons de courbure principaux R_{x1}, R_{y1}, R_{x2} et R_{y2} des surfaces enveloppes de S_1 et S_2.



Géométrie générale d'un contact hertzien convexe.



$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_{x1}} + \frac{y_1^2}{2R_{y1}}$$

$$z_2 = -\left(\frac{x_1^2}{2R_{x2}} + \frac{y_1^2}{2R_{y2}}\right)$$

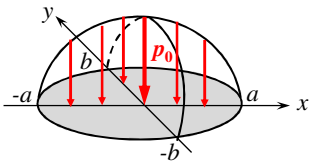
La hauteur de séparation $h=z_1-z_2$ des solides en contact est alors donnée par :

$$h = \frac{x_1^2}{2R_x} + \frac{y_1^2}{2R_y} \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}} \qquad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{y2}}$$

On obtient ainsi l'équation d'une ellipse qui décrit le pourtour de la surface de contact sous l'action d'une force de compression normale N.

Hertz a déterminé analytiquement la forme elliptique de la surface de contact et le champ de pression auquel elle est soumise sous l'action d'une force normale *N*.

$$p(x,y) = p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$



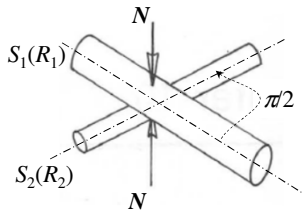
$$N = \int_{SC} p(x,y)dS = p_0\int_{SC}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dS$$

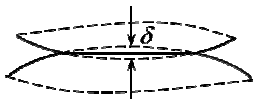
$$x = a\rho\cos\theta \quad y = b\rho\sin\theta \quad \Rightarrow dS = 2\pi ab\rho d\rho \quad (0 \le \rho \le 1)$$

$$N = 2\pi abp_0\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho \quad \Rightarrow \quad N = 2\pi abp_0\left[-\frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi abp_0$$

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi ab} = \frac{3}{2}p_{moy} \qquad \left(p_{moy} = \frac{N}{\pi ab}\right)$$

L'application la plus simple des résultats de Hertz concerne le contact de deux cylindres à axes perpendiculaires.





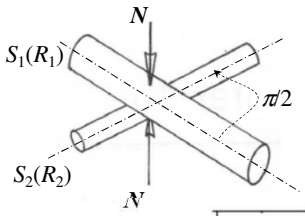
δ enfoncement élastique d'un cylindre dans l'autre

Les dimensions *a* et *b* de l'ellipse de contact se calculent par les relations de Hertz

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \left(\frac{3}{2}(k_1+k_2)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}N\right)^{1/3} \qquad \frac{\delta}{r} = \frac{3}{4a}\left(k_1+k_2\right)N \propto N^{2/3}$$

$$k_i = \frac{1-\upsilon_i^2}{E_i}$$

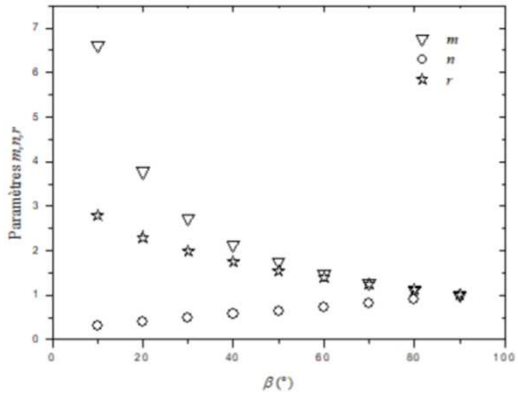
m,n,r **coefficients de Hertz (sans dimensions)**



Les coefficients *m,n,r* de Hertz dépendent d'un paramètre géométrique, β, définie par :

$$\beta = \arccos \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

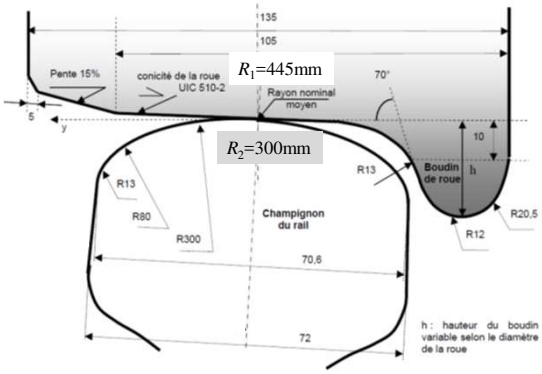
β °		90
m	6	1
n	0	1
r	2	1

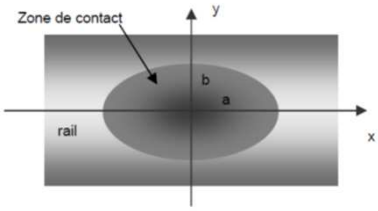


Variations des paramètres de Hertz

TD 16 – Applications des formules de Hertz

Contact roue-rail (TGV) – dimensions caractéristiques





$E_1 = E_2 = 200$ GPa $\quad \upsilon_1 = \upsilon_2 = 0,3$

Sachant que *N*=110kN calculer a, b, δ, p_0 et l'aire de la surface de contact.

β °	10	20	30	40	50	60	70	80	90
m	6,61	3,78	2,73	2,14	1,75	1,49	1,28	1,13	1
n	0,32	0,41	0,49	0,57	0,64	0,72	0,80	0,89	1
r	2,80	2,30	1,98	1,74	1,55	1,39	1,25	1,12	1

$$k_i = \frac{1-\upsilon_i^2}{E_i}$$

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \left(\frac{3}{2}(k_1+k_2)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}N\right)^{1/3}$$

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi ab}$$

$$\frac{\delta}{r} = \frac{3}{4a}(k_1+k_2)N \propto N^{2/3}$$

$$\beta = \arccos\frac{0,445-0,3}{0,445+0,3} = 78,8°$$

$$k_1 = k_2 = 4,55\cdot 10^{-12}\, m^2 N^{-1}$$

$$m = 1,28-(1,28-1,13)\frac{8,8}{10} = 1,15$$

$$n = 0,8+(0,89-0,8)\frac{8,8}{10} = 0,88$$

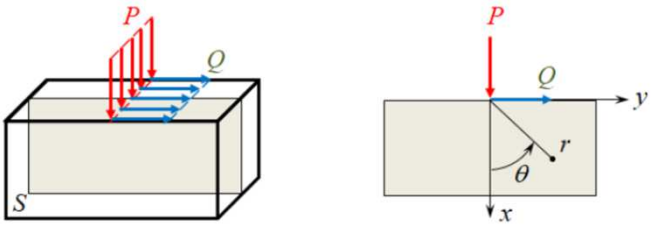
$$a = 7,42mm \qquad b = 5,68mm \qquad p_0 = 1246MPa$$

Aire de la surface de contact $Sc = \pi ab = 1,32cm^2$

$$r = 1,25-(1,25-1,12)\frac{8,8}{10} = 1,14 \qquad \delta = 0,115mm$$

Mécanique du contact en élasticité plane

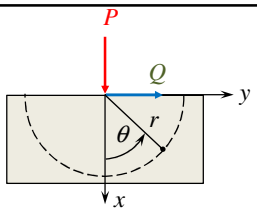
Un solide *S* assimilable à un espace semi infini, est soumis à des efforts de contact *P* et *Q*. Etudier ce problème en élasticité plane revient à se placer dans un plan médian, avec le solide *S* assimilable à un demi plan infini.



a – configuration 3D b – configuration plane

La solution de ce problème d'élasticité dans la configuration plane a été proposé par Flamant en 1892. La fonction d'Airy associée est de la forme :

$$A(r,\theta) = Br\theta\sin\theta + Cr\theta\cos\theta$$



$$A(r,\theta) = Br\theta\sin\theta + Cr\theta\cos\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) = 0$$

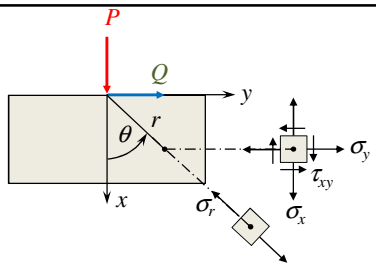
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = \frac{2B}{r}\cos\theta - \frac{2C}{r}\sin\theta$$

Les constantes B et C sont déterminées en équilibrant les forces P et Q avec les contraintes agissant sur un demi-cercle de rayon r :

$$-P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos\theta \cdot r d\theta = B\pi \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{P}{\pi}$$

$$-Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \sin\theta \cdot r d\theta = C\pi \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{Q}{\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(r,\theta) = -\dfrac{r\theta}{\pi}\left(P\cos\theta + Q\sin\theta\right) \\ \sigma_r = -\dfrac{2}{\pi r}\left(P\cos\theta - Q\sin\theta\right) \end{cases}$$



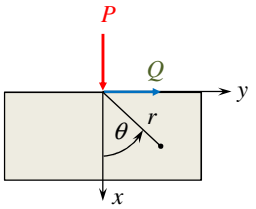
$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r}\left(P\cos\theta - Q\sin\theta\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2\theta$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin\theta\cos\theta$$

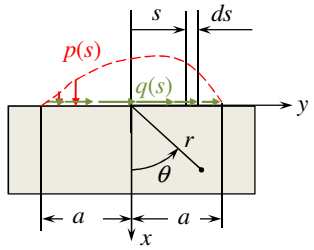
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi}\frac{Px^3 - Qx^2 y}{\left[x^2 + y^2\right]^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi}\frac{Pxy^2 - Qy^3}{\left[x^2 + y^2\right]^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi}\frac{Px^2 y - Qxy^2}{\left[x^2 + y^2\right]^2} \end{aligned}$$



$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\frac{Px^3 - Qx^2 y}{\left[x^2+y^2\right]^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\frac{Pxy^2 - Qy^3}{\left[x^2+y^2\right]^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\frac{Px^2 y - Qxy^2}{\left[x^2+y^2\right]^2}$$



Pressions de contact *p(s)* et *q(s)* réparties sur une largeur 2*a* du demi plan *S*.
En remplaçant *P* par *p(s)ds*, *Q* par *q(s)ds* et *y* par *y-s*, les contraintes sont :

$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds + \frac{2x^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(y-s)}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds$$

$$\sigma_y = -\frac{2x}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(y-s)^2}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds + \frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(y-s)^3}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2x^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(y-s)}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds + \frac{2x}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(y-s)^2}{\left[x^2+(y-s)^2\right]^2}ds$$

Les contraintes dans un solide soumis à de efforts de contact, peuvent aussi être déterminées, en élasticité plane, par les potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$.

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]$$

Le solide étudié occupant un demi plan infini, les contraintes sont définies uniquement dans cette partie. Muskhelishvili* a montré que le champ des contraintes ne dépend dans ces conditions que du seul potentiel $\varphi(z)$. En posant $\phi(z)=\varphi'(z)$, il est donné par :

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\left[\phi(z) + \overline{\phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\phi(z)\right]$$

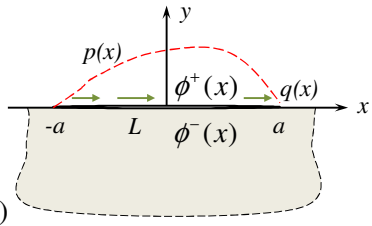
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z) - \phi(z) - \bar{\phi}(z)\right] \qquad \left(\overline{\phi(\bar{z})}\right)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (z-\bar{z})\overline{\phi'(z)} + \phi(z) - \phi(\bar{z})$$

*N.I. Muskhelishvili, Mathematical Theory of Elasticity, *Noordhoff International Publishing*, 1962

Solide semi infini – Ligne de contact L ($-a<x<a$).
Actions de contact normale, p(x), et tangentielle, q(x).

Conditions limites sur L $\begin{cases} \sigma_y(x,0) = p(x) \\ \tau_{xy}(x,0) = q(x) \end{cases}$



$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (z-\bar{z})\overline{\phi'(z)} + \phi(z) - \phi(\bar{z})$$

Sur L $\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) - iq(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x)$

où $\phi^-(x)$ et $\phi^+(x)$ sont les valeurs de $\phi(z)$ lorsque $y \to 0^-$ ou $y \to 0^+$

S'appuyant sur les travaux de Riemann-Hilbert, Muskhelishvili montre que le potentiel $\phi(z)$ est donné par :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t) - iq(t)}{t-z}\,dt$$

où t est un paramètre réel variant le long de la ligne de contact L, $pour |x| < a$.

Si $q(t)=fp(t)$ f coefficient de frottement

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t) - iq(t)}{t-z}\,dt$$

$$\phi(z) = \frac{1-if}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)}{t-z}\,dt \quad \Rightarrow \quad \phi(z) = (1-if)\phi_n(z)$$

$$\phi(\bar{z}) = \frac{1-if}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)}{t-\bar{z}}\,dt \quad \Rightarrow \quad \bar{\phi}(z) = \overline{\phi(\bar{z})} = -\frac{1+if}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)}{t-z}\,dt = -(1+if)\phi_n(z)$$

En éliminant $\phi_n(z)$ $\Rightarrow$ $\bar{\phi}(z) = -\frac{1+if}{1-if}\phi(z)$

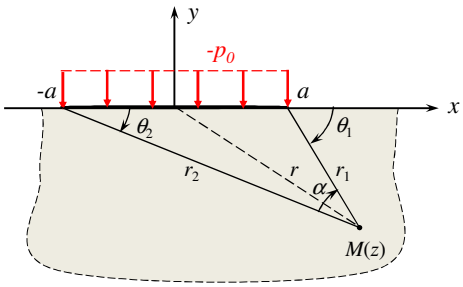
$$\sigma_y + \sigma_x = 2\left[\phi(z) + \overline{\phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\phi(z)\right]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z) - \phi(z) - \bar{\phi}(z)\right] \qquad \left(\overline{\phi(\bar{z})}\right)$$

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\left[\phi(z) + \overline{\phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\phi(z)\right]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z) + \frac{2if}{1-if}\phi(z)\right]$$

TD 17 – Solide soumis à une action de contact normale constante sans frottement



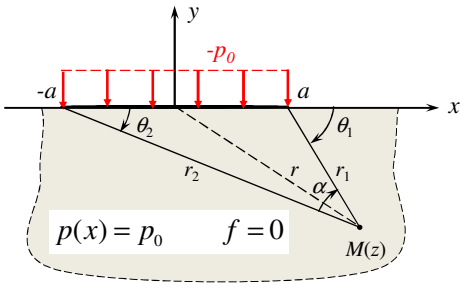
- Déterminer $\phi(z)$ et $\phi'(z)$.
- Calculer les composantes du tenseur des contraintes. On posera : $z-a=r_1e^{i\theta_1}$, $z+a=r_2e^{i\theta_2}$
- Déterminer les contraintes principales σ_1, σ_2 et le cisaillement $\tau=(\sigma_1-\sigma_2)/2$
- Déterminer les lignes d'iso contraintes σ_1, σ_2 , τ et tracer l'iso contraintes τ.

Corrigé

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)-iq(t)}{t-z}dt$$

$$\sigma_y+\sigma_x=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right]=4\,\mathrm{Re}\left[\phi(z)\right]$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z)+\frac{2if}{1-if}\phi(z)\right]$$



$$\phi(z)=\frac{p_0}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=\frac{p_0}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a} \qquad \phi'(z)=\frac{p_0}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}\right)$$

$$z-a=r_1e^{i\theta_1}$$
$$z+a=r_2e^{i\theta_2}$$

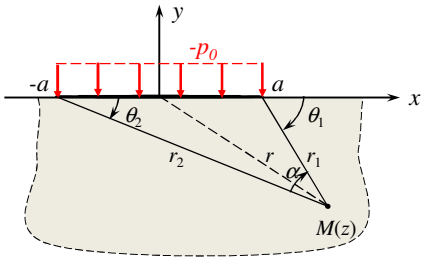
$$\phi(z)=\frac{p_0}{2\pi i}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right) \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\phi(z)\right]=\frac{p_0}{2\pi}(\theta_1-\theta_2)$$

$$z=re^{i\theta}$$

$$r\sin\theta=\begin{matrix} r_1\sin\theta_1 \\ r_2\sin\theta_2 \end{matrix}$$

$$2(\bar{z}-z)\phi'(z)=-\frac{2p_0}{\pi}r\sin\theta\left(\frac{1}{r_1}e^{-i\theta_1}-\frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}\right)$$

$$=-\frac{2p_0}{\pi}\left(\sin\theta_1\cos\theta_1-\sin\theta_2\cos\theta_2+i\left(\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1\right)\right)$$

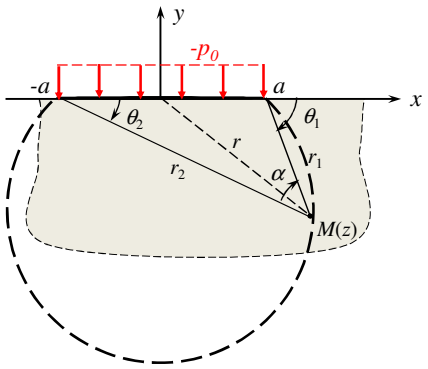


$$\sigma_y + \sigma_x = 4\,\mathrm{Re}\left[\phi(z)\right] = \frac{2p_0}{\pi}\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -\frac{2p_0}{\pi}\left(\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2 + i\left(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p_0}{2\pi}\left[2\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2\right] \\ \sigma_y &= \frac{p_0}{2\pi}\left[2\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{p_0}{2\pi}\left[\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2\right] \end{aligned}$$

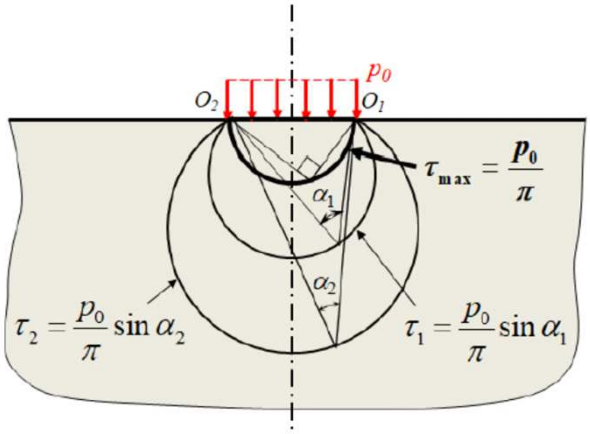
En posant $\alpha=\theta_1-\theta_2$, le calcul contraintes principales σ_1, σ_2 et du cisaillement $\tau=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ donne :

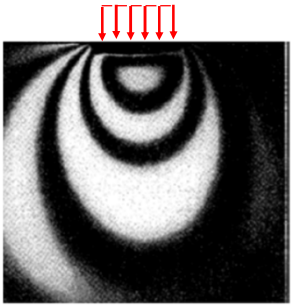


$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{1,2} = \frac{p_0}{\pi}\left(\alpha \pm \sin\alpha\right) \qquad \tau = \frac{p_0}{\pi}\sin\alpha$$

Les lignes d'iso contraintes (α=constante) sont des cercles passant par les points $O_1(-a,0)$ et $O_2(a,0)$.



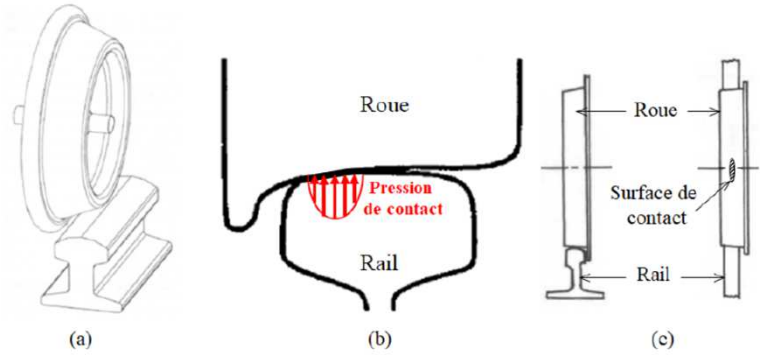


Lignes à cisaillement τ constant

Franges à τ constant (Johnson*)

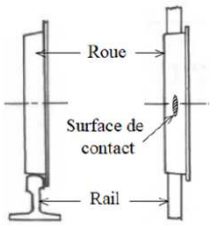
*K.L. Johnson, Contact Mechanics, Cambridge University Press, Ninth printing 2003

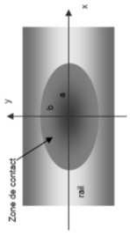
Contact linéaire roue-rail

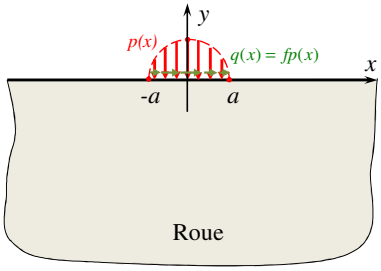


a- Roue et rail b- Pression de contact c- Surface de contact

La surface elliptique de contact étant étroite, le contact est assimilé en première approximation à un contact linéaire, de type cylindre/cylindre à axes perpendiculaires, sur une longueur 2*a*.





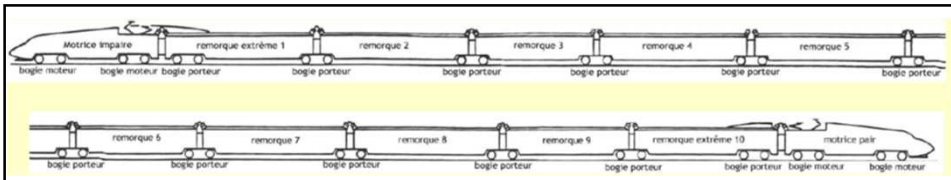


La roue est assimilée à un demi plan élastique sur lequel s'exerce une pression de contact *p(x)* avec ou sans frottement

$$p(x) = p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi ab} \qquad (N \quad \text{effort normal})$$

$$F = p_0\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy = p_0\frac{\pi b}{2} \qquad (F \text{ force normale par unité d'épaisseur})$$

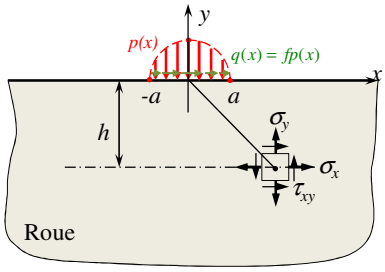


Motrice TGV	Remorque TGV	Wagon lourd	Motrice Tramway	Voiture Métro
110	80	90	50	40

Effort normal N (kN) par roue ferroviaire

Aux USA, les roues ferroviaires des motrices supportent 160 *kN*

N (kN)	a (mm)	b (mm)	p_0 (MPa)	F (MN/m)
40	5,34	4,08	876	5,62
50	5,75	4,40	944	6,52
80	6,73	5,15	1104	8,16
90	6,99	5,35	1148	9,65
110	7,48	5,72	1227	11,03
160	8,47	6,48	1391	14,16



Les contraintes à une profondeur *h (y=-h)* sont données par les relations établies précédemment (slide 17) avec *q(x)=fp(x)*.

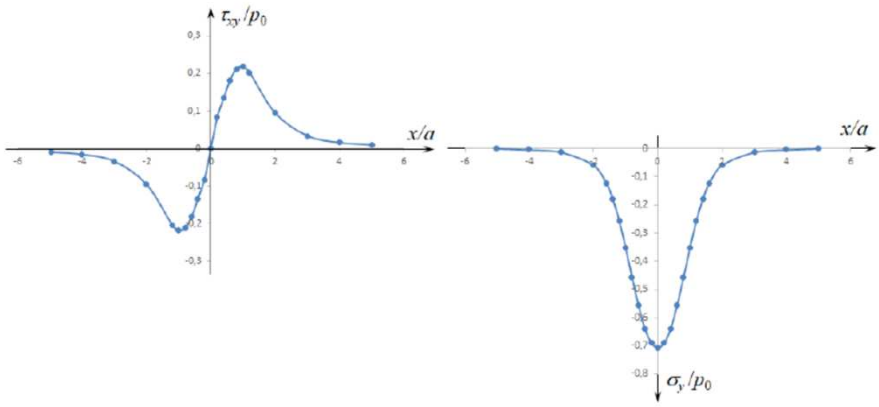
$$\sigma_x = \frac{2h}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(x-s)^2}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds + \frac{2f}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(x-s)^3}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds$$

$$\sigma_y = \frac{2h^3}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds + \frac{2fh^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(x-s)}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2h^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(x-s)}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds + \frac{2fh}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)(x-s)^2}{\left[(x-s)^2+h^2\right]^2}ds$$

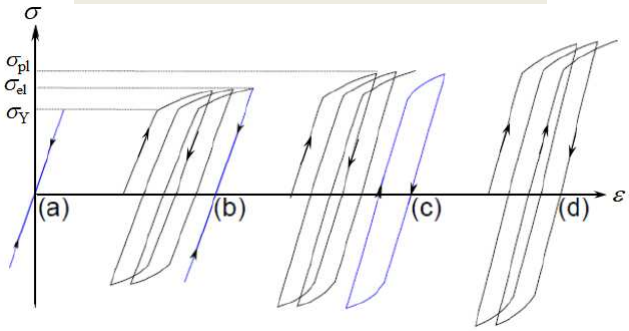
$$p(s) = p_0\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}$$

$$p_0 < 0$$



Variations de σ_{xy} et σ_y à $h = a$ et pour $f = 0$

Comportement du matériau



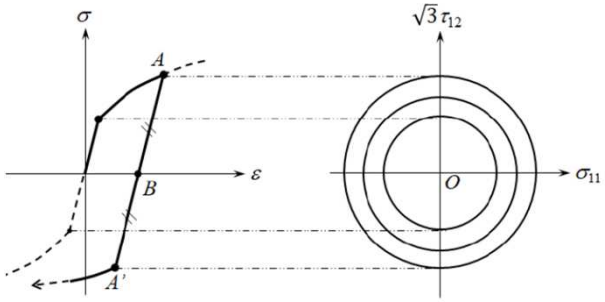
Réponse d'un matériau à un chargement cyclique

(a) comportement élastique parfait ; (b) adaptation élastique ;
(c) accommodation plastique ; (d) effet de rochet

L'accommodation plastique et l'effet de rochet causent l'amorçage de fissures superficielles ou en sous surface, qui conduit à un endommagement par fatigue de contact de roulement (FCR).

L'écrouissage qui caractérise le durcissement des matériaux engendré par les déformations, est schématisé de différentes manières. On distingue essentiellement l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique, linéaire ou non.

L'écrouissage d'un matériau est isotrope si la surface seuil d'écoulement plastique (frontière du domaine élastique) ne dépend que d'un paramètre scalaire.



Ecrouissage isotrope : essais de traction-compression et de traction torsion

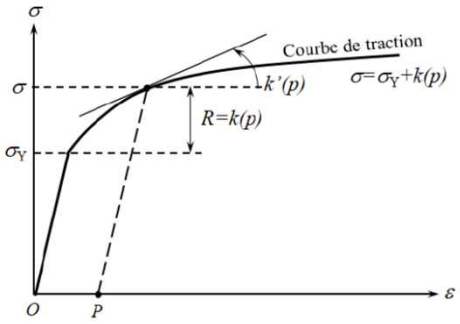
Les courbes de charge, lieu des points dans l'espace des contraintes où le seuil plastique est atteint, se déduisent les unes des autres par homothétie de centre O.

L'évolution de la surface de charge est gouvernée par un seul paramètre scalaire : la déformation plastique cumulée, p, ou toute variable R associée. Si on note $\tilde{\sigma}$ le tenseur des contraintes, la surface de charge est décrite par :

$$f = f(\tilde{\sigma}, R) = f_Y(\tilde{\sigma}) - \Gamma(R)$$

La fonction $\Gamma(R)$ introduit l'écrouissage alors que f_Y indique la forme du critère de limite d'élasticité. Si on choisit le critère de Von Mises, la fonction de charge f, en notant $\tilde{\sigma}_d$ le déviateur du tenseur des contraintes, est donnée par :

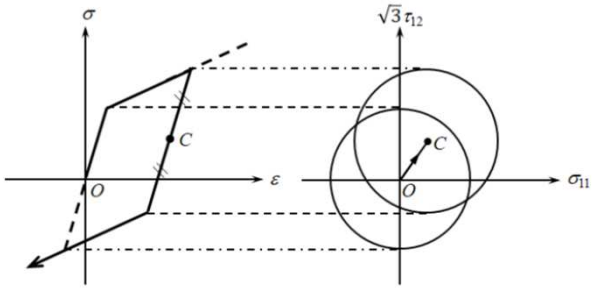
$$f = \sigma_{eq} - \sigma_Y - R \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{eq} = J_2(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_d : \tilde{\sigma}_d} \quad \text{et} \quad R = k(p)$$



Identification des variables R et p en traction simple

L'écrouissage cinématique linéaire est décrit par le modèle de Prager. Ce modèle introduit une variable d'écrouissage, de nature tensorielle $\tilde{X}$, associée aux contraintes internes. Le tenseur $\tilde{X}$ indique la position de la surface de plasticité :

$$f = f_Y(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) - k \qquad (k \neq \sigma_Y \quad \text{en général})$$



Ecrouissage cinématique : essais de traction-compression et de traction torsion

La surface seuil d'écoulement plastique garde une amplitude constante mais se déplace par translation dans l'espace des contraintes

La fonction de charge f s'écrit dans le cas du critère de Von Mises :

$$f = J_2\left(\tilde{\sigma} - \tilde{X}\right) - k = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\tilde{\sigma}_d - \tilde{X}_d\right):\left(\tilde{\sigma}_d - \tilde{X}_d\right)} - k$$

Dans le modèle d'écrouissage cinématique linéaire, l'incrément du tenseur d'écrouissage $d\tilde{X}$ est proportionnel à l'incrément du tenseur des déformations plastiques $d\tilde{\varepsilon}_p$:

$$d\tilde{X} = \frac{2}{3} C d\tilde{\varepsilon}_p \qquad \text{où} \qquad C \simeq \frac{\sigma_u - \sigma_E}{\varepsilon_u}$$

Le modèle d'écrouissage cinématique non linéaire modifie la relation entre $d\tilde{X}$ et $d\tilde{\varepsilon}_p$. Il introduit dans l'incrément de variation du tenseur des contraintes internes, un terme de rappel :

$$d\tilde{X} = \frac{2}{3} C d\tilde{\varepsilon}_p - \gamma \tilde{X} dp$$

où γ est un coefficient caractéristique du matériau et dp est l'incrément de déformation plastique cumulée.

Pour décrire des situations de grandes déformations où l'effet de rochet se manifeste, il est nécessaire d'adopter un modèle d'écrouissage combinant l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique non linéaire. La surface de charge se modifie par translation et dilatation ; elle est de la forme :

$$f = J_2\left(\tilde{\sigma} - \tilde{X}\right) - R(p) - k$$

où la variable d'écrouissage R représentant la variation de dimension du domaine d'élasticité, dépend de la déformation plastique cumulée p et où k est la limite d'élasticité initiale.

$$dR = b(Q - R)dp \qquad \text{(loi d'écrouissage)}$$

où Q désigne la valeur asymptotique correspondant au régime cyclique stabilisé, et b indique la rapidité de stabilisation.

L'intégration de cette relation donne la variation au cours d'un chargement cyclique unidimensionnel :

$$\frac{\sigma - \sigma_E}{\sigma^\infty - \sigma_E} = 1 - e^{-bp}$$

où σ_E est la limite d'élasticité du matériau ($\sigma_E = R(0) + k$) et σ^∞ la demi-amplitude de la contrainte du cycle stabilisé.

Modèles d'endommagement

La capacité d'un modèle à prévoir le comportement d'un matériau en fatigue de contact de roulement (FCR) se heurte à deux difficultés

Etat de contrainte multiaxial et non proportionnel

Description de l'état des contraintes dans des conditions de contact changeantes

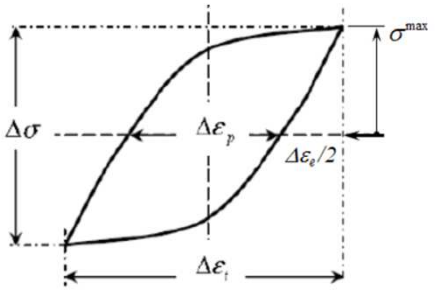
Approches dérivées de la théorie de contact de Hertz

Dans les contacts de roulement, une bande du matériau se trouvant sous la surface de contact est soumise à des cycles de chargement multiaxiaux. La prévision de la durée de vie en FCR nécessite la détermination des déformations plastiques et de l'endommagement cumulé.

Les modèles d'endommagement se subdivisent en deux catégories : ceux qui quantifient l'endommagement en faisant appel à une contrainte, une déformation ou une énergie équivalentes, et ceux qui associent la fatigue à un plan particulier de rupture ou plan critique.

Les approches basées sur la déformation équivalente ont été les premières utilisées pour traiter les problèmes de contact. Elles réduisent essentiellement l'état tridimensionnel des déformations à un paramètre scalaire de déformation équivalente. Un exemple simple de ces approches est donné par la loi empirique de Manson-Coffin-Basquin :

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f^{'}}{E}\left(2N_f\right)^b + \varepsilon_f^{'}\left(2N_f\right)^c$$



$$\sigma^{max} = E\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \sigma_f^{'}\left(2N_f\right)^b$$

Ces approches se sont révélées non conservatives lorsqu'elles sont appliquées à des chargements non proportionnels.

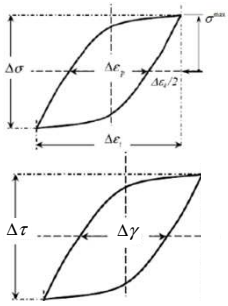
Les modèles basées sur la densité d'énergie utilisent les produits des contraintes et des déformations pour représenter cette densité. L'amorçage et la propagation de fissure de fatigue se produit dans la direction de la plus grande valeur de la densité d'énergie. Cependant, l'utilisation de ce type de modèle est limitée aux contraintes moyennes positives, ce qui n'est pas le cas en présence de contact de roulement.

Les modèles de plan critique résultent des observations expérimentales des mécanismes d'amorçage et de propagation des fissures de fatigue. Ces modèles considèrent le plan du matériau ayant la déformation de cisaillement maximale comme le plus endommageant. L'écrouissage du matériau, important dans les contacts de roulement, n'est cependant pas pris en compte de manière satisfaisante.

Les modèles combinant le plan critique et la densité d'énergie, utilisent cette densité comme paramètre endommageant sur chaque plan du matériau et pour chaque incrément de chargement. Le calcul du paramètre endommageant est exprimé par la somme pondérée des produits de contraintes et de déformations $\Delta\sigma\Delta\epsilon$ et $\Delta\tau\Delta\gamma$. Le plan du matériau soumis à la plus grande valeur du paramètre endommageant pendant le cycle de chargement, est défini comme le plan de rupture : il est déterminé en utilisant l'approche du plan critique. Ce paramètre représente la fraction de l'énergie de déformation due uniquement à la variation des contraintes et des déformations dans le plan critique et non pas l'énergie de déformation totale.

$$FP = <\sigma^{\max}> \frac{\Delta\varepsilon}{2} + J\Delta\tau\Delta\gamma \qquad \text{(paramètre de fatigue)}$$

$$<x> = \frac{1}{2}\left(x + |x|\right)$$



$\sigma^{\max}$ contrainte normale au plan de la fissure

$\Delta\varepsilon$ déformation normale au plan de la fissure

$\Delta\tau$ contrainte de cisaillement dans le plan de fissure

$\Delta\gamma$ déformation de cisaillement dans le plan de fissure

J paramètre de pondération associé au mode de fissuration en cisaillement ($J \approx 0{,}2$)

Le plan critique ayant la valeur la plus élevée du paramètre de fatigue, $FP_{\max}$, est pris comme plan de rupture.

Lorsque $FP_{\max}$ est déterminé, la durée de vie N_f est calculée par la relation :

$$FP_{\max} = \sigma_{\max}\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma_f^{'2}}{E}\left(2N_f\right)^{2b} + \sigma_f^{'}\varepsilon_f^{'}\left(2N_f\right)^{b+c}$$

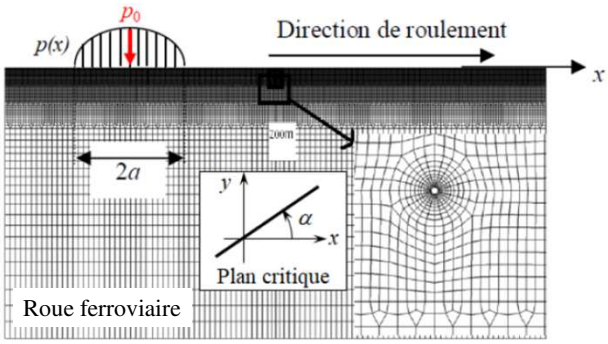
Calcul par éléments finis de la durée de vie en FCR

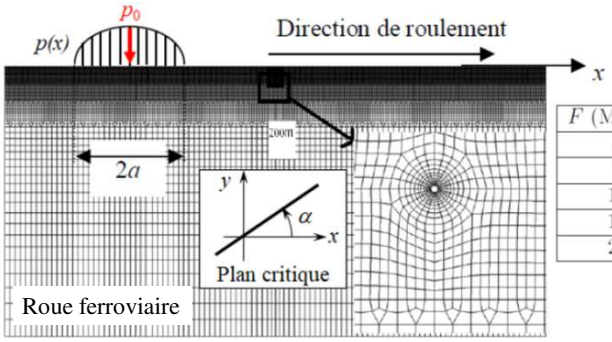
L'écrouissage du matériau combinant l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique non linéaire décrit bien les différents comportements et notamment l'accommodation plastique et l'effet de rochet.
Pour la caractérisation de l'endommagement le modèle combinant la densité d'énergie et le plan critique, permettant de déterminer à la fois l'orientation du plan de rupture et la durée de vie correspondante, est le plus utilisé pour la fatigue de contact de roulement.

Modélisation ABAQUS

Roue assimilée à un demi plan infini sur lequel s'exerce une pression de contact en mouvement.

Roue comportant un défaut circulaire en dessous de la surface de roulement.





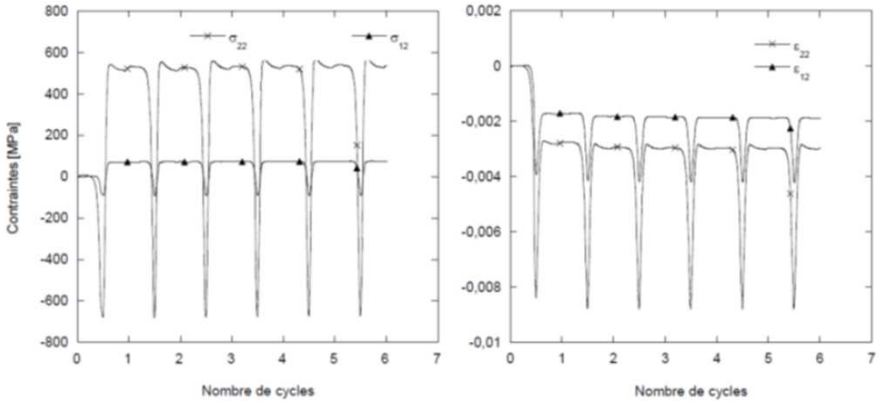
F (MN/m)	a (mm)	p_0 (MPa)
4	4,592	554,5
7	6,075	733,6
12	7,954	960,5
18	9,741	1176
22	10,77	1300

La pression est appliquée et mise en mouvement à l'aide d'une subroutine du code de calcul ABAQUS. Les valeurs de la force normale F par unité d'épaisseur utilisées dans les calculs sont : F=4, 7, 12, 18 et 22MN/m (Thèse de Modar Taraf 2008). Les longueurs a et la pression p_0 correspondantes sont données dans le tableau suivant.

A partir des résultats du calcul par éléments finis ($\Delta\sigma,\Delta\varepsilon,\Delta\tau,\Delta\gamma$) , le paramètre de fatigue $FP=<\sigma_{max}>\Delta\varepsilon/2+0,2\Delta\tau\Delta\gamma$ est déterminé et la durée de vie est ensuite calculée par :

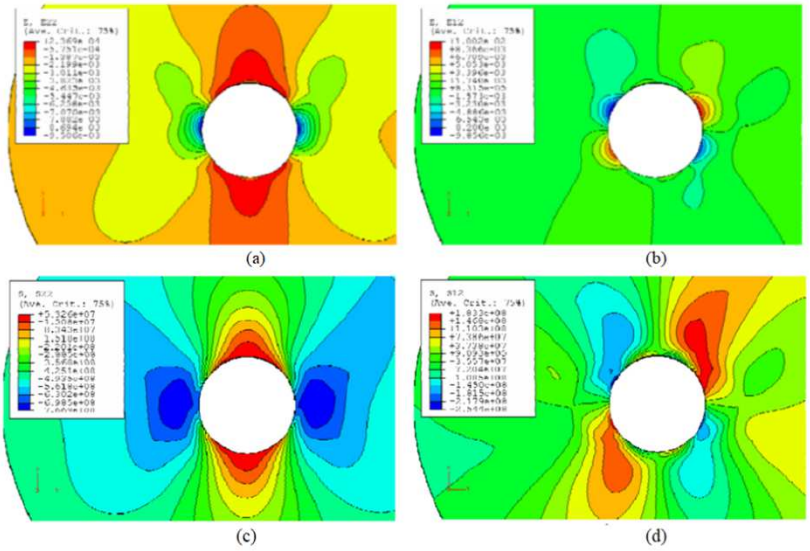
$$FP_{max} = \frac{\sigma_f^{'2}}{E}\left(2N_f\right)^{2b} + \sigma_f^{'}\varepsilon_f^{'}\left(2N_f\right)^{b+c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_f^{'} = 936\text{MPa}, \ \varepsilon_f^{'} = 10,3\% \\ b = -0,089 \qquad c = -0,559 \end{cases}$$

Résultats de calcul (Thèse Modar Taraf, 2008 - Université de Lorraine

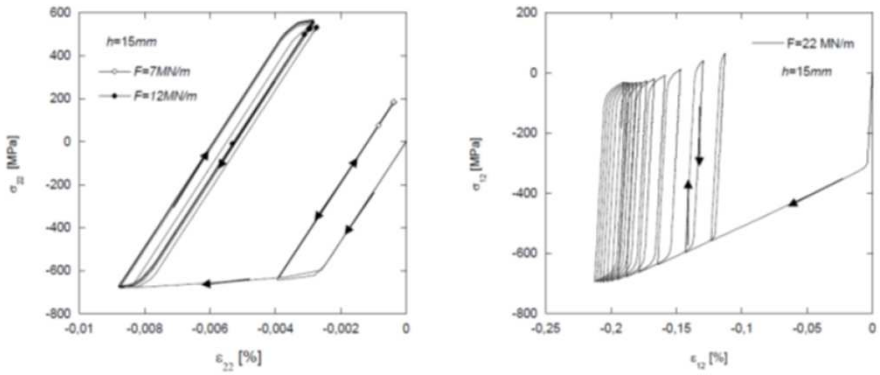


Contraintes et déformations au cours des cycles de chargement à F=12MN/m au voisinage d'un défaut circulaire r=0,5mm situé à la profondeur h=15mm

La valeur maximale de σ_{22} correspond au σ_{max}, les amplitudes de ε_{22}, σ_{12} et ε_{12} correspondent respectivement à $\Delta\varepsilon$, $\Delta\tau$ et $\Delta\gamma$ (FP=<σ_{max}>$\Delta\varepsilon/2+0{,}2\Delta\tau\Delta\gamma$)

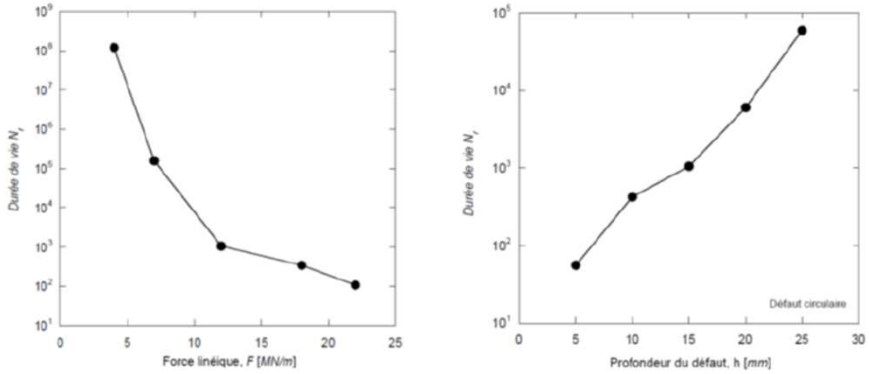


Distribution des contraintes et des déformations au cycle stabilisé (F=12MN/m, h=15mm) au voisinage du défaut
(a) ϵ_{22} (b) ϵ_{12} (c) σ_{22} (d) σ_{12}



(a) (b)

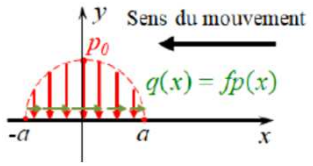
Variations au droit du défaut circulaire situé à h=15mm
(a) σ_{22} en fonction de ϵ_{22} à F=7 et 12MN/m
(b) σ_{12} en fonction de ϵ_{12} à F=22MN/m

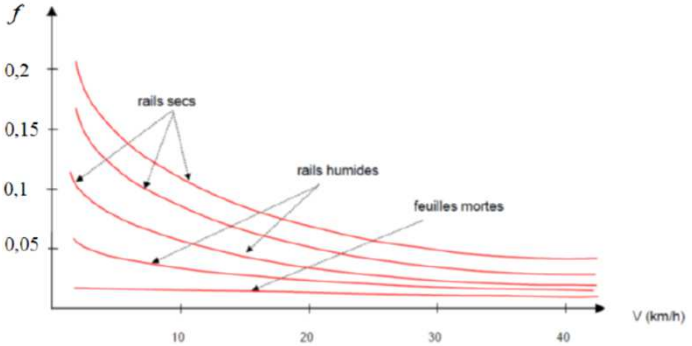


(a) (b)

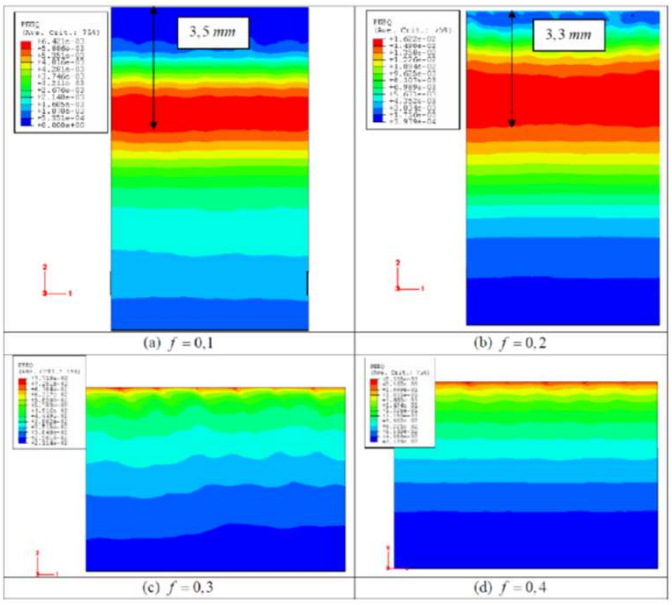
Durées de vie en fonction
(a) de F à h=15mm et (b) de h à F=12MN/m

$$q = fp(x) = fp_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

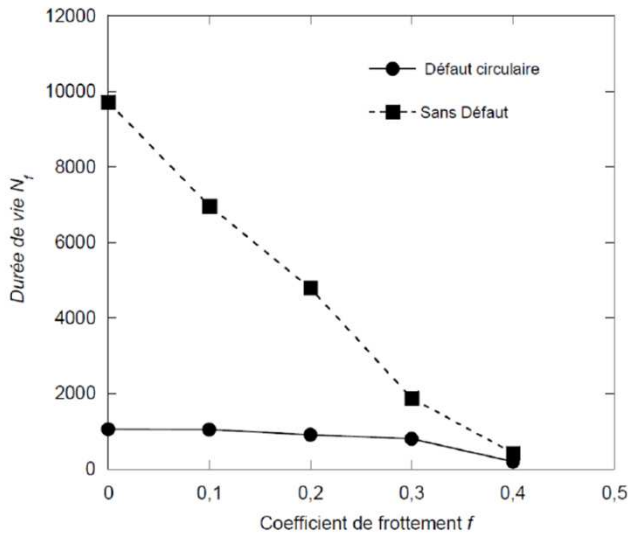




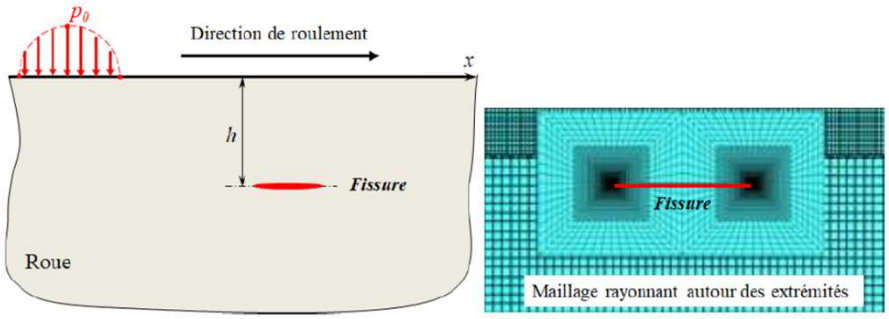
Variations du coefficient de frottement f en fonction de la vitesse



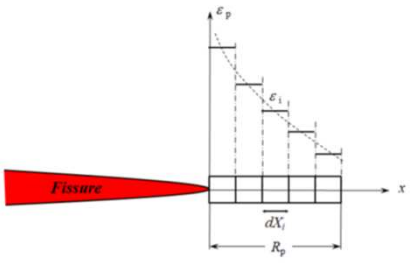
Répartition des déformations équivalentes



Durée de vie N_f en fonction du coefficient de frottement f

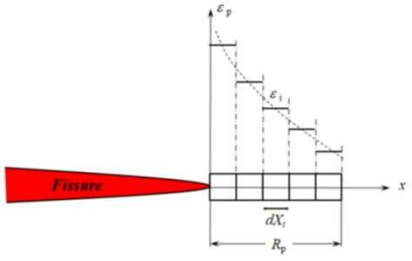


Fissure à une profondeur h et maillage autour de ses extrémités



Distribution des déformations en aval de l'extrémité de la fissure dans des éléments de largeur dX_i

Lors de la propagation de la fissure, les éléments situés en aval de son extrémité subissent des déformations plastiques croissantes. Le calcul repose sur l'hypothèse que les déformations successives de l'élément adjacent à l'extrémité de la fissure, sont celles observées à un instant donné en aval de cette extrémité



Distribution des déformations en aval de l'extrémité de la fissure dans des éléments de largeur dX_i

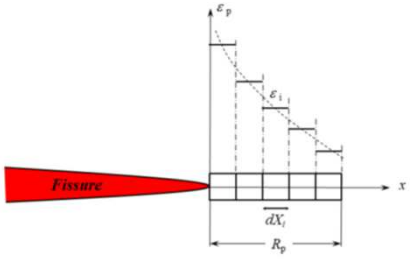
La rupture intervient lorsque

$$\sum_i \frac{n(\varepsilon_i)}{N_f(\varepsilon_i)} = 1$$

où $n(\epsilon_i)$ est le nombre de cycles effectués à l'amplitude de déformation ϵ_i et $N_f(\epsilon_i)$ le nombre de cycles à rupture correspondant à cette amplitude.

$$n(\varepsilon_i) = \frac{dX_i}{da/dN}$$

où da/dN est la vitesse de propagation considérée comme constante pour de faibles variations de la longueur de fissure.



Distribution des déformations en aval de l'extrémité de la fissure dans des éléments de largeur dX_i

$$\sum_i \frac{n(\varepsilon_i)}{N_f(\varepsilon_i)} = 1$$

$$n(\varepsilon_i) = \frac{dX_i}{da/dN}$$

$$\frac{da}{dN} = \sum_0^{R_p} \frac{\Delta X_i}{N_f(\varepsilon_i)}$$

Dans un calcul par éléments finis, la largeur des mailles ΔX_i, de quelques microns, au voisinage immédiat de la pointe de la fissure est généralement constante. Le nombre de cycles N_f est déterminé à partir du paramètre de fatigue $FP=FP(N_f)$, en adoptant la même approche que pour le défaut circulaire.