





Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 4 – Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures

Prof. Abderrahim Zeghloul Université de Lorraine

1

SOMMAIRE

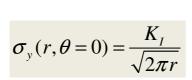
- Introduction Concept de facteur d'intensité des contraintes K
 - Modes de sollicitation des fissures
 - Approche de Westergaard
 - Expression des champs de contrainte et de déplacement
- Définition du FIC K et expressions des champs de contrainte et de déplacement
 - Mode de cisaillement anti-plan
 - Principe de superposition
 - Zone plastifiée à fond de fissure
 - Méthodes pratiques de calcul du FIC Méthode des fonctions poids
 - Ténacité FIC critique
 - Approche énergétique de Griffith
 - Relation entre énergie de Griffith et FIC K

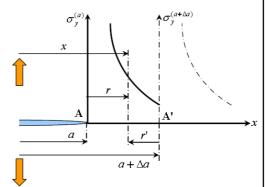
A. Zeghloul CFMR Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures 2

Relation entre énergie de Griffith G et FJC K

Considérons une fissure sollicitée en mode I ; les chargements en mode II ou III se traitent de façon similaire.

La fissure de longueur initiale a se propage sur une distance Δa . Le champ de contrainte en aval de l'extrémité A de la fissure est donné par :





A. Zeghloul

CFMR Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures

Le champ de déplacement des lèvres de la fissure en amont de l'extrémité A' s'écrit :

$$u_{y}(r, \theta = \pi) = \frac{K_{I}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1 - \upsilon^{*})$$
 avec
$$\begin{cases} \upsilon^{*} = \upsilon & \text{en déformations planes} \\ \upsilon^{*} = \frac{\upsilon}{1 + \upsilon} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

Pour déterminer le taux de restitution d'énergie ou énergie de Griffith G, il est plus pratique de calculer le travail de régression de la fissure de la position $A'(x=a+\Delta a)$ à la position A(x=a), autrement dit de considérer le travail nécessaire pour refermer les lèvres de la fissure.

La force appliquée aux lèvres de la fissure est $\sigma_v(r)edx$ avec r=x-a.

Le déplacement en $r'=a+\Delta a-x$ est $u_y(r')$. Le travail de régression est donné par :

$$\Delta W' = -\Delta U = 2 \int_{a+\Delta a}^{a} \frac{\sigma_{y}(r) u_{y}(r')}{2} dx$$

A. Zeghloul

CFMR Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures

$$\sigma_{y}(r,\theta=0) = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \qquad u_{y}(r,\theta=\pi) = \frac{K_{I}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1-v^{*})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{y}(r,\theta=0) = \frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}} \end{bmatrix} \qquad u_{y}(r,\theta=\pi) = \frac{K_{I}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1-\upsilon^{*})$$

$$\Delta W' = -\Delta U = 2 \int_{a+\Delta a}^{a} \frac{\sigma_{y}(r)u_{y}(r')}{2} dx = \frac{K_{I}^{2}}{\mu} \cdot \frac{1-\upsilon^{*}}{\pi} \underbrace{\int_{a+\Delta a}^{a} \sqrt{\frac{a+\Delta a-x}{x-a}} dx}_{0}$$

Pour calculer l'intégrale (1), on effectue le changement de variables suivant :

$$\frac{\Delta a}{x-a} = X \Rightarrow dx = -\frac{dX}{X^2} \Delta a \text{ et } \begin{cases} x = a & \Rightarrow X = \infty \\ x = a + \Delta a & \Rightarrow X = 1 \end{cases}$$

L'intégrale (1) devient alors $I = \Delta a \int_1^{\infty} \sqrt{X-1} \left(-\frac{dX}{X^2}\right)$ que l'on intègre par parties en

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{X - 1} \implies d\alpha = \frac{dX}{2\sqrt{X - 1}} \\ d\beta = -\frac{dX}{X^2} \implies \beta = \frac{1}{X} \end{cases} \Rightarrow I = \Delta a \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sqrt{X - 1}}{X}\right]_{1}^{\infty}}_{=0} - \int_{1}^{\infty} \frac{dX}{2X\sqrt{X - 1}} \right\}$$

$$I = \Delta a \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sqrt{X-1}}{X}\right]_{1}^{\infty}}_{2X\sqrt{X-1}} - \int_{1}^{\infty} \frac{dX}{2X\sqrt{X-1}} \right\} \qquad I = \Delta a \left[-Arctg \sqrt{X-1} \right]_{1}^{\infty} = -\frac{\pi}{2} \Delta a$$

$$I = \Delta a \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sqrt{X-1}}{X} \right]_{1}^{\infty}}_{2} - \int_{1}^{\infty} \frac{dX}{2X\sqrt{X-1}} \right\} \qquad I = \Delta a \left[-Arctg \sqrt{X-1} \right]_{1}^{\infty} = -\frac{\pi}{2} \Delta a$$

$$\Delta U = \frac{K_{I}^{2}}{\mu} \frac{1-\upsilon^{*}}{2} \Delta a \qquad \Rightarrow G_{I} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{K_{I}^{2}}{\mu} \frac{1-\upsilon^{*}}{2}$$

- pour un état de déformations planes $(v^* = v)$: $G_I^{DP} = \frac{K_I^2}{F} (1 v^2)$
- pour un état de contraintes planes $\left(\upsilon^* = \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\right)$ $G_I^{CP} = \frac{K_I^2}{F}$

ou encore
$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}$$
 avec
$$\begin{cases} E' = E & \text{en CP} \\ E' = E/(1 - v^2) & \text{en DP} \end{cases}$$

Des calculs analogues peuvent être effectués en modes II et III pour une fissure de longueur a se propageant sur une distance Δa .

Mode II

$$\begin{cases} \sigma_{xy}(r,\theta=0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \\ u_{x}(r,\theta=\pi) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi} (1-\upsilon^{*})} \end{cases} G_{II} = \frac{K_{II}^{2}}{E'} \text{ avec } \begin{cases} E' = E \text{ en CP} \\ E' = E/(1-\upsilon^{2}) \text{ en DP} \end{cases}$$

Mode III

$$\begin{cases} \sigma_{yz} (r, \theta = 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \\ u_3(r, \theta = \pi) = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \end{cases} \qquad G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}$$

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}$$







Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 5 – Application de la MLR à la fatigue des matériaux

Prof. Abderrahim Zeghloul Université de Lorraine

SOMMAIRE

- Introduction
- Endurance en fatigue
- Endommagement par fatigue
 - Fissuration par fatigue
- Endommagement en propagation par fatigue
- Fermeture de fissure en bas de cycle de fatigue
 - Propagation des fissures courtes en fatigue
- Applications : calculs des durées de vie en fatigue

A. Zeghlou

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux

Introduction

La fatigue correspond à la détérioration des propriétés mécaniques des matériaux consécutives à l'application de sollicitations cycliques.

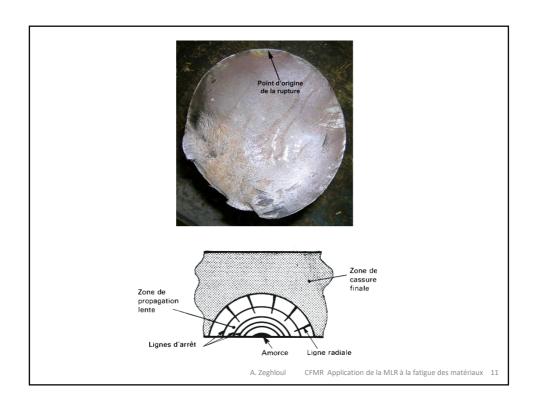
L'endommagement par fatigue, associé à un grand nombre de défaillances de systèmes mécaniques (industries automobile, aéronautique ...), se manifeste par l'apparition de fissures qui se propagent ensuite et parfois jusqu'à rupture.

Dans la pratique des procédures de caractérisation du phénomène de fatigue, la période de l'amorçage (apparition de fissure) est traitée à l'aide d'essais sur des éprouvettes lisses (parfois entaillées) et l'on détermine alors une durée de vie en fonction d'une amplitude de contrainte ou de déformation.

La phase de propagation est quant à elle essentiellement étudiée à partir d'essais de fatigue sur des éprouvettes entaillées, la vitesse de fissuration est ensuite décrite en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK .

Le développement de la mécanique de la rupture a été d'un apport majeur dans l'étude et la description de la propagation des fissures *de* fatigue.

A. Zeghloul





Le déraillement s'est produit quand une fissure de fatigue préexistante a atteint une taille critique et a causé la rupture du rail sous le poids du train.

site Web du BST (<u>www.tsb.gc.ca</u>)

Liberty Ship Failures





Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 13





A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 14

Trajet du vol 32 Qantas Airways

L'accident s'est produit le 4 novembre 2010 à 10h01 heure locale (02h01 UTC) alors que l'appareil redécollait de Singapour en direction de Sydney.

Cause de l'accident

L'agence australienne de sécurité des transports et le motoriste Rolls-Royce ont enquêté sur l'accident et ont établi que c'est un « défaut de fabrication des turbines haute pression et à pression intermédiaire, là où le circuit distribue l'huile pour les roulements des arbres » qui est en cause : il a ensuite causé des fissures liées à la fatigue. C'est donc

Rolls-Royce qui a été reconnue responsable, et dû verser un dédommagement de 72 millions d'euros à la compagnie australienne. Cet appareil a repris ses vols commerciaux en avril 2012.

A. Zeghloul

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux

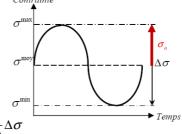
Endurance en fatigue

Un cycle de contrainte est caractérisé par une amplitude de contrainte $\Delta \sigma$ et par une contrainte moyenne σ^{noy} .

Pour décrire les résultats, on utilise souvent l'amplitude $\Delta \sigma$ et le rapport R défini par :

$$R = \frac{\sigma^{\min}}{\sigma^{\max}} < 1$$
 $\Delta \sigma = \sigma^{\max} - \sigma^{\min} = \sigma^{\max} (1 - R)$

$$\sigma^{\max} = \frac{\Delta \sigma}{1 - R}$$
 $\sigma^{\min} = \frac{R \Delta \sigma}{1 - R}$
 $\sigma^{moy} = \frac{1 + R}{2(1 - R)}$



Les courbes de fatigue sont souvent présentées en fonction de la contrainte alternée σ_a qui correspond à la demi amplitude de contrainte:

$$\sigma_a = \frac{\Delta \sigma}{2} = \frac{1}{2} (\sigma^{\text{max}} - \sigma^{\text{min}})$$

A. Zeghloul

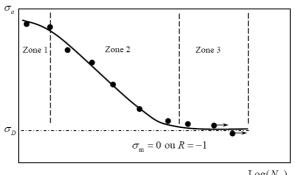
4B Appli tractio

The state of the s

flexion rotative

16

Lorsqu'on soumet un lot d'éprouvettes à des sollicitations cycliques, d'amplitude et de fréquence fixées, on obtient une courbe (en échelle semi-logarithmique) présentant la contrainte alternée en fonction du nombre de cycles à rupture, qui a l'allure suivante:





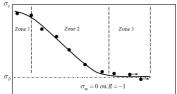
 $\mathrm{Log}(N_{\mathrm{R}})$

On peut distinguer sur cette courbe, connue sous les noms de *courbe d'endurance*, de *Wöhler* ou encore *courbe S-N (Stress - Number of cycles)*, trois domaines :

A. Zeghloul

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 17

 une zone à faible nombre de cycles ou zone de fa forte contrainte, où la rupture qui intervient aprè précédée d'une déformation plastique significative



- une zone de fatigue ou d'endurance limitée (zone un nombre de cycles plus important, nombre qui c

- une zone d'endurance illimitée ou zone de sécurie (2016 5), sous fairer conduitres, pour laquelle la rupture ne se produit pas avant un nombre donné de cycles généralement supérieur à 10⁶ cycles pour les aciers et 10⁷ cycles pour les alliages légers.

Cette dernière zone est délimitée par une asymptote qui donne la limite de fatigue ou limite d'endurance, notée σ_D pour des essais à $\sigma^{moy}=0$ ou R=-1

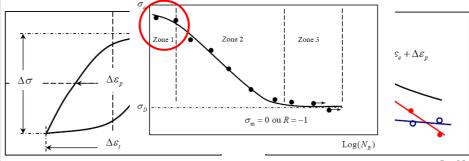
La limite d'endurance σ_D peut être définie comme l'amplitude de contrainte en dessous de laquelle une microfissure créée par fatigue dans un matériau n'arrive plus à passer une barrière métallurgique telle un joint de grain par exemple.

Dans la zone 2 d'endurance limitée, une des nombreuses expressions empiriques pour relier σ_a et N_R est la relation de Weibull :

$$N_R = A/(\sigma_a - \sigma_D)^n$$
 pour $\sigma_a > \sigma_D$

A. Zeghloul

La zone 1 correspond au domaine de fatigue oligocyclique où les contraintes appliquées sont supérieures à la limite d'élasticité du matériau. Dans cette zone, la courbe contrainte-déformation stabilisée prend la forme d'une boucle d'hystérésis.



LogN

Les lois empiriques les plus utilisées pour décrire les résultats de fatigue oligocyclique sont :

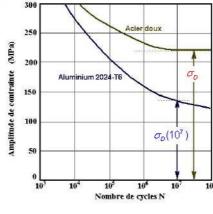
$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f \cdot (2N_R)^c \quad \text{Relation de Manson-Coffin} \qquad \qquad \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} \cdot (2N_R)^b \quad \text{Relation de Basquin}$$

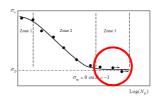
$$\varepsilon_f' \quad \text{et } c \text{ coefficient et exposant de ductilité en fatigue}$$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 19

Dans la zone 3 d'endurance illimitée, il est parfois difficile d'évaluer la limite de fatigue ou limite d'endurance σ_D .

On introduit alors la notion de limite de fatigue conventionnelle qui correspond à la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle la probabilité de rupture est de 50% après N cycles de sollicitation (N variant de 10^6 à 10^8).

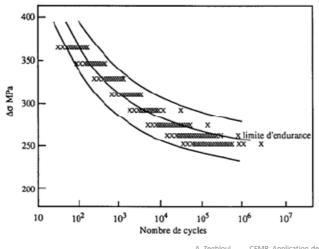




A. Zeghloul

Aspect probabiliste de la courbe de Wöhler

Etant donné la dispersion sur les résultats d'essais d'endurance, il est nécessaire de construire des courbes d'équiprobabilité.

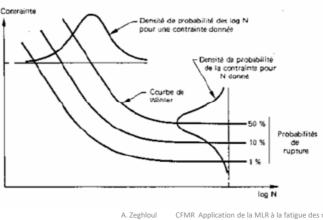


Acier XC10 D'après Francois-Pineau-Zaoui

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 21

La courbe de Wöhler étant la courbe médiane à 50%, il est vérifié par l'expérience que :

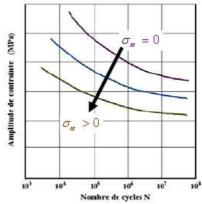
- La distribution de $Log(N_R)$ suit une loi normale pour une contrainte donnée;
- La distribution de la contrainte suit une loi normale pour un nombre de cycles donné.



Influence de la contrainte moyenne sur la courbe de Wöhler

Lorsque les essais de fatigue sont réalisés à contrainte moyenne σ_m non nulle, la durée de vie est modifiée :

- Une contrainte moyenne de traction diminue la durée de vie ;
- Une contrainte moyenne de compression l'augmente ;
- La limite d'endurance σ_D varie dans les mêmes sens.

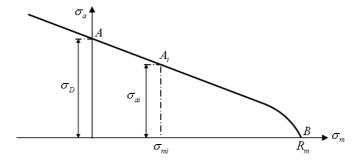


Différents diagrammes permettent de représenter ces variations :

- Digramme de Haig;
- Droites de Söderberg ou de Goodman;
- Parabole de Gerber.

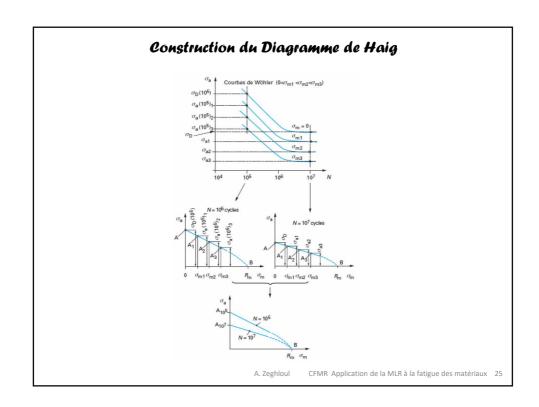
A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 23

Diagramme de Haig



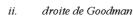
Ce diagramme, déduit des courbes de Wöhler, représente la variation de l'amplitude de contrainte $\sigma_a = \Delta \sigma/2$ en fonction de la contrainte moyenne σ_m pour N_R donné. Les points A et B correspondent respectivement à σ_D obtenue à R=-1 ($\sigma_m=0$) et à R_m la résistance à rupture en traction. La construction expérimentale de Haig résulte :

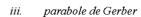
- d'essais dynamiques à $\sigma_m = 0$ pour déterminer le point A;
- d'essais dynamiques à $\sigma_{mi} \neq 0$ pour déterminer les points A_i



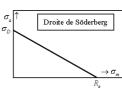
Plusieurs représentations de la courbe AB ont été proposées pour la construction du diagramme d'endurance de Haig. Ces représentations empiriques nécessitent la connaissance de la limite d'endurance à $\sigma_{\scriptscriptstyle m}=0$, de la limite d'élasticité $\sigma_{\scriptscriptstyle E}$ (appelée aussi $R_{\scriptscriptstyle e}$) et de la résistance ultime à la traction $R_{\scriptscriptstyle m}$ (ou $\sigma_{\scriptscriptstyle u}$) du matériau :

i. droite de Söderberg

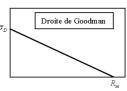




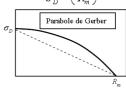
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_e} = 1$$











- la droite de Söderberg et, dans une moindre mesure, la droite de Goodman sont trop pénalisantes pour $\sigma_m > 0$ et trop optimistes pour $\sigma_m < 0$;
- la parabole de Gerber est assez juste pour $\sigma_m > 0$ mais elle est pénalisante pour $\sigma_m < 0$ puisqu'elle ne rend pas compte de l'augmentation de l'endurance σ_a dans ce domaine.

A. Zeghloul

TD13 : Calcul de durées de vie à partir des Diagrammes d'endurance

Une pièce en alliage d'aluminium est soumise à un chargement cyclique variant de 50 à 350*MPa*. Estimer la durée de cette pièce à partir des droites de Goodman de Söderberg, et de la parabole de Gerber.

Données : Re=435MPa, $R_m=570MPa$ et la courbe de Wöhler à $\sigma_m=0$ est décrite par $\sigma_D=a-bLogN_R$ avec a=630MPa et b=65MPa.

<u>Corrigé</u>

Contraintes alternée et moyenne : $\sigma_a = 150MPa$ $\sigma_m = 200MPa$

Droite de Söderberg
$$\sigma_a = \sigma_D (1 - \frac{\sigma_m}{R_e}) \Rightarrow \sigma_D = 278 MPa$$
 $\Rightarrow N_R = 2,60 \cdot 10^5 cycles$

Droite de Goodman
$$\sigma_a = \sigma_D (1 - \frac{\sigma_m}{R_m}) \Rightarrow \sigma_D = 231 MPa$$
 $\Rightarrow N_R = 1,38 \cdot 10^6 \text{ cycles}$

Parabole de Gerber
$$\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right) \Rightarrow \sigma_D = 171 MPa$$
 $\Rightarrow N_R = 1,15 \cdot 10^7 \text{ cycles}$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 27

Endommagement en fatigue

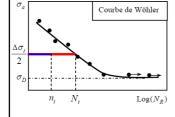
Lorsqu'un élément de structure est soumis à un chargement d'amplitude constante, de contrainte $\Delta \sigma$ ou de déformation plastique $\Delta \varepsilon_p$, les courbes de Wöhler ou de Manson-Coffin fournissent directement sa durée de vie.

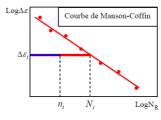
Si en revanche l'amplitude de chargement varie au cours du temps, la façon classique d'aborder le problème consiste à définir l'endommagement associé à chaque amplitude

Le dommage élémentaire D_i sous amplitude constante ($\Delta \sigma_i$ ou $\Delta \varepsilon_i$) est défini par la relation suivante :

 n_i le nombre de cycles effectué à l'amplitude $\Delta\sigma_i$ ou $\Delta\varepsilon_i$

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$
 N_i le nombre de cycles à rupture correspondant (déduit de la courbe de Wöhler ou de celle de Manson-Coffin)





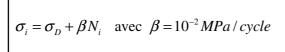


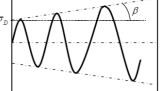
TD14 : Calcul de durée de vie en fatigue à partir de la courbe de Wöhler

Un élément de structure subit un chargement cyclique pour amorcer une fissure détectable par les moyens de CND. La courbe de Wöhler à l'amorçage à contrainte moyenne σ_m =0 et à amplitude de contrainte σ_a fixée est donnée

 $N = \frac{A}{(\sigma_a - \sigma_D)^2}$ avec $A = 10^8$ et $\sigma_D = 200MPa$

Déterminer les nombres de cycles à l'amorçage pour des amplitudes de contraintes $\sigma_1 = 300MPa$ et $\sigma_2 = 250MPa$. En déduire le nombre de cycles à l'amorçage si l'élément de structure est soumis à un spectre de charge constitué de deux cycles d'amplitude σ_1 et 3 cycles d'amplitude σ_2 . Calculer le nombre de cycles à l'amorçage si l'amplitude augmente progressivement :





ullet Les nombres de cycles N_1 et N_2 nécessaires pour amorcer une fissure aux amplitudes $\sigma_{\!_{1}}$ et $\,\sigma_{\!_{2}},$ se déduisent directement de la courbe de Wöhler :

$$N_1 = \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_D)^2} = \frac{10^8}{100^2} = 10^4 \text{ cycles}$$

$$N_1 = \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_D)^2} = \frac{10^8}{100^2} = 10^4 \text{ cycles}$$
 $N_2 = \frac{A}{(\sigma_2 - \sigma_D)^2} = \frac{10^8}{50^2} = 4 \cdot 10^4 \text{ cycles}$

• Le spectre constitué de 2 cycles σ_1 et 3 cycles σ_2 engendre un endommagement élémentaire $D_i = 2/N_1 + 3/N_2$. Si N_s est le nombre de spectres à l'amorçage, on a d'après la règle de cumul linéaire de Miner :

$$\sum D_i = N_S \cdot D_i = 1 \qquad \Rightarrow N_S = \frac{1}{2/N_1 + 3/N_2} = 3636 \text{ spectres}$$

Chaque spectre étant constitué de 5 cycles, il vient $N_{cycles} = 5N_s = 18182 cycles$

• Pour le chargement croissant $\sigma_i = \sigma_{\rm D} + \beta N_i$, l'endommagement élémentaire est :

$$dD_i = \frac{dN_i}{N_i} = \frac{d\sigma_i}{\beta N_i} \text{ où } N_i = \frac{A}{\left(\sigma_i - \sigma_D\right)^2} \text{ est le nombre de cycles à l'amorçage à } \sigma_i$$

Selon la règle de Miner, on a à l'amorçage $\int \frac{dN_i}{N_i} = 1$ soit :

$$\int_{\sigma_D}^{\sigma^*} \frac{(\sigma_i - \sigma_D)^2 d\sigma_i}{\beta A} = 1 \Rightarrow \sigma^* = (3\beta A)^{1/3} + \sigma_D \approx 344 MPa$$

 σ^* est l'amplitude de contrainte atteinte au moment de l'amorçage. Le nombre de cycles N^* à l'amorçage est alors donné par :

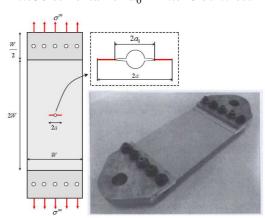
$$N^* = \frac{\sigma^* - \sigma_D}{\beta} = 14422 cycles$$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux

Fissuration par fatigue

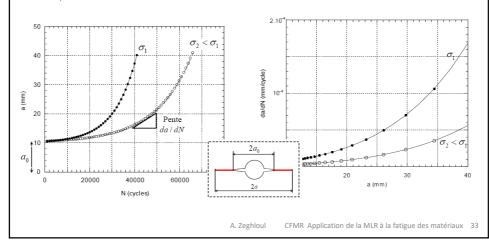
Les éprouvettes les plus utilisées pour les essais de fissuration en fatigue sont à ligament long (CT, CCT ...). Ces éprouvettes sont normalisées. Dans le cas de l'éprouvette CCT, des bonnes conditions d'essai exigent une épaisseur $\sim W/20$, le trou central $\sim W/30$ et l'entaille $2a_0 \sim W/10$ où W est la largeur de la plaque.

La photo ci-contre montre l'éprouvette CCT avec le dispositif de fixation entre les mors de la machine de fatigue. La longueur de fissure est mesurée régulièrement en cours d'essai à l'aide de méthodes optique ou électrique.

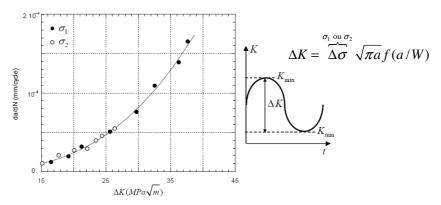


La manière la plus simple de représenter la progression des fissures, consiste à rapporter leur longueur a en fonction du nombre de cycles N subit par l'éprouvette d'essai. La description de la vitesse de fissuration da/dN en fonction de a est une autre approche.

La figure ci-dessous donne un exemple de résultats issus de ces deux approches pour des essais à amplitudes différentes (σ_1 et σ_2) mais à même rapport de charge $R = \sigma^{\min}/\sigma^{\max}$.



Lorsqu'on présente les résultats précédents en décrivant la vitesse de fissuration da/dN en fonction de l'amplitude de l'intensité des contraintes $\Delta K = K_{max} - K_{min}$, on aboutit à une courbe unique :



Ce résultat montre bien que le paramètre ΔK est le plus approprié pour décrire la fissuration en fatigue. Le FIC ΔK est la force motrice.

La figure précédente montre que les vitesses de fissuration en fonction de l'amplitude ΔK du FIC sont décrites par une courbe unique pour deux essais effectués à même rapport de charge R mais à des amplitudes de contraintes σ_1 et σ_2 différentes.

Ce résultat permet d'énoncer le principe de similitude relatif au FIC : lorsque deux fissures sollicitées à même rapport de charge, sont soumises à la même amplitude ΔK du FIC , les vitesses de fissuration sont alors les mêmes.

Le rapport de charge est défini par :

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \text{ avec } K_{\max} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} f(a/W) \text{ et } K_{\min} = \sigma_{\min} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

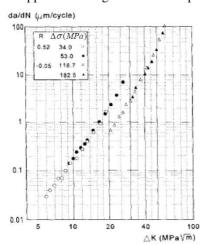
f(a/W) est la fonction complaisance de l'éprouvette d'essai

$$\Delta K = K_{\text{max}} - K_{\text{min}} = K_{\text{max}} (1 - R) \implies K_{\text{max}} = \frac{\Delta K}{1 - R} \text{ et } K_{\text{min}} = \frac{R\Delta K}{1 - R}$$

On peut donc écrire : $\frac{da}{dN} = f\left(K_{\text{max}}, K_{\text{min}}\right) \text{ ou } \frac{da}{dN} = f\left(\Delta K, R\right)$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 3

En général les courbes de fissuration sont représentées en échelle bi-logarithmique. Le résultat suivant montre un exemple de courbes de fissuration obtenues sur un alliage d'aluminium* : celles-ci sont issues d'essais sur éprouvettes sollicitées avec deux rapports de charge R et deux amplitudes de contraintes pour chaque valeur de R.

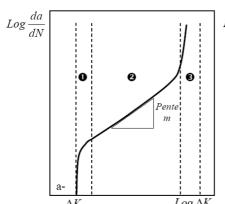


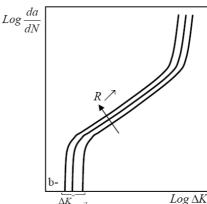
Ces résultats montrent bien que les courbes de fissuration dépendent du rapport de charge.

A même ΔK , la vitesse de propagation croît avec R, i.e. da/dN est plus rapide lorsque le niveau moyen de la contrainte cyclique, σ_m , augmente.

^{*}J. Schijve, Fatigue of Structures and Materials, Kluwer Academic Publishers, 2001

L'allure complète d'une courbe de fissuration en fatigue est schématisée ci-dessous pour différents rapports de charge R.





 Le domaine • des faibles vitesses, obtenu par des essais à ΔK décroissant : cette procédure permet de déterminer la valeur seuil de l'amplitude du FIC, ΔK_{seuil}, en dessous de laquelle, une fissure, présente dans un matériau, ne se propage plus.

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 37

La valeur de ΔK_{seuil} varie avec R et le milieu environnant. La relation empirique la plus utilisée pour décrire ces variations est de la forme :

$$\Delta K_{seuil} = (1 - R)^{\gamma} \Delta K_0$$
 Relation de Klesnil et Lucas

Où ΔK_0 est la valeur seuil pour R=0. L'exposant γ est compris entre 0 et 1 : il est proche de 1 lorsque l'essai de fatigue est conduit dans des environnements agressifs et proche de 0 pour les milieux inertes.

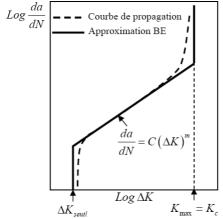
 Le domaine des vitesses moyennes, obtenu par des essais à ΔK croissant: la vitesse de fissuration dans ce domaine est le plus souvent décrite par la relation empirique de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K\right)^m$$

C et m sont des constantes qui dépendent du matériau, du milieu environnant et du rapport de charge R .

- Le domaine $oldsymbol{0}$ des vitesses très élevées où les valeurs de K_{\max} se rapprochent de la ténacité K_C du matériau.

Dans les bureaux d'étude, on considère en première approximation que la courbe de propagation peut être décrite par une relation de Paris étendue au domaine **0** et **3** selon la procédure indiquée sur la figure Ci-dessous :



Extension du domaine de Paris $da/dN = C(\Delta K)^m$ entre $\Delta K = \Delta K_{seutl}$ et $K_{max} = K_c$

La durée de vie est calculée par intégration de la relation suivante :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C\Delta K^m}$$

Avec les longueurs a_0 et a_c déterminées à partir des égalités suivantes:

$$\Delta K_{seuil} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_0} f(a_0 / W)$$
$$K_{I_C} = \sigma_{\text{max}} \sqrt{\pi a_c} f(a_c / W)$$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 39

Endommagement en propagation par fatigue

Lorsqu'un élément de structure fissuré est soumis à un chargement d'amplitude de contrainte constante $\Delta \sigma$, la durée de vie est calculée par une relation de type :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C\Delta K^m}$$
 où $\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a/W)$

Si l'élément est soumis à un spectre de charge comportant plusieurs amplitudes $\Delta \sigma_i$, on procède de la façon suivante :

- On calcule l'accroissement de longueur de fissure Δa_i dû à chaque amplitude $\Delta \sigma_i$ appliquée pendant ΔN_i cycles, soit :

$$\Delta a_i = C \left(\Delta K_i \right)^m \Delta N_i = C \left(\Delta \sigma_i \sqrt{\pi a_i} f(a_i / W) \right)^m \Delta N_i$$

Le nombre de cycles $\Delta N_{\rm spectre}$ subis pendant une période du spectre de charge et l'accroissement de longueur de fissure $\Delta a_{\rm spectre}$ correspondant, sont donnés par :

$$\Delta N_{spectre} = \sum_{i} \Delta N_{i}$$
 et $\Delta a_{spectre} = \sum_{i} \Delta a_{i}$

L'accroissement de longueur de fissure $\Delta a_{\rm spectre}$ reste en général faible par rapport à la longueur de fissure a, si bien que l'on peut déterminer la vitesse moyenne $da/dN_{\it spectre}$ sur le spectre de charge :

$$\frac{da}{dN}\bigg)_{spectre} = \frac{\Delta a_{spectre}}{\Delta N_{spectre}} = \frac{\sum_{i} \Delta a_{i}}{\sum_{i} \Delta N_{i}} = \frac{\sum_{i} C \left(\Delta \sigma_{i} \sqrt{\pi a} f(a/W)\right)^{m} \Delta N_{i}}{\sum_{i} \Delta N_{i}}$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dN} \Big|_{spectre} = C \Big(\sqrt{\pi a} f(a/W) \Big)^m \frac{\sum_{i} (\Delta \sigma_i)^m \Delta N_i}{\sum_{i} \Delta N_i}$$

Ce calcul repose sur l'utilisation d'une loi de cumul linéaire (de type Miner) des accroissements élémentaires Δa_i de fissure.

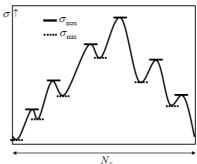
On calcule ensuite la durée de vie en intégrant la relation précédente.

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 41

Lorsque le spectre de chargement n'est pas décomposable en cycles à $\Delta\sigma$ fixée, on utilise une approche, proposée par Barsom*, qui consiste à relier la vitesse de propagation da/dN à une amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK_{mS} moyennée (moyenne des carrés des contraintes) sur une période du spectre de N_S cycles :

$$\Delta K_{mS} = \frac{\sigma_{mS}^{\max} - \sigma_{mS}^{\min}}{\Delta \sigma_{mS}} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

$$\text{avec} \begin{cases} \sigma_{mS}^{\max} = \sqrt{\frac{1}{N_S} \sum_{1}^{N_S} \sigma_{\max}^2} \\ \sigma_{mS}^{\min} = \sqrt{\frac{1}{N_S} \sum_{1}^{N_S} \sigma_{\min}^2} \end{cases}$$

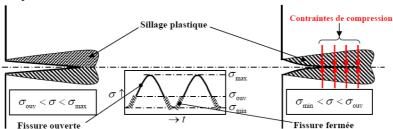


On détermine, à partir de ces contraintes, R_{mS} le rapport de charge moyen sur le spectre : $R_{mS} = \frac{\sigma_{mS}^{\min}}{\sigma_{mS}^{\max}} \Rightarrow \frac{da}{dN} = C\left(\Delta K_{mS}\right)^m \text{ et on calcule } N_f \text{ par intégration}$

*J.M. Barsom, ASTM STP 595, p. 217, 1976

Fermeture de fissure en bas de cycle de fatigue

On a vu qu'une zone plastifiée se forme à l'extrémité d'une fissure. Lorsqu'une fissure de fatigue se propage, il se forme alors un sillage plastique autour de la fissure. Au cours d'un cycle de chargement, la décharge élastique du matériau entraîne des contraintes de compression sur le sillage plastique : c'est le phénomène de fermeture découvert par Elber* en 1971.



Il s'ensuit que la fissure reste fermée pendant une partie du bas de cycle jusqu'à la contrainte σ_{ouv} . L'amplitude de contrainte qui contribue effectivement à la propagation est alors :

 $\Delta \sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{ouv}$

 $\Rightarrow \Delta K_{\it eff} = K_{\it max} - K_{\it ouv}$

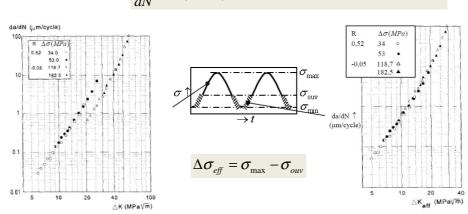
 * W. Elber, ASTM STP 486, p. 230-242, 1971

A. Zeghloul

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 43

Elber a proposé de décrire les courbes de propagation en termes de ΔK_{eff} , soit pour le domaine de Paris :

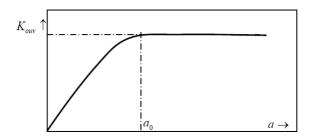
$$\frac{da}{dN} = C \left(\Delta K_{eff} \right)^m \quad \text{avec } \Delta K_{eff} = \Delta \sigma_{eff} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$



Ces résultats montrent que l'influence du rapport de charge disparaît.

Propagation des fissures courtes de fatigue

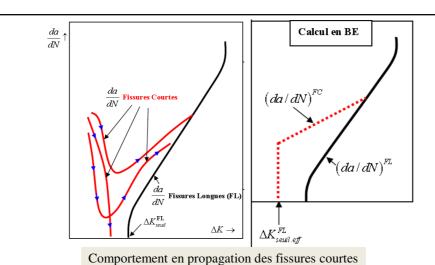
Il faut que le sillage plastique autour d'une fissure soit suffisamment long pour que les contraintes de compression en bas de cycle puissent s'exercer. La figure suivante montre schématiquement comment évolue le FIC à l'ouverture de la fissure K_{ouv} en fonction de la longueur fissurée a.



L'expérience montre que les fissures dont la longueur est inférieure à a_0 (dites fissures courtes) se propagent plus vite et à des niveaux de ΔK inférieurs à ΔK_{seuil} .

. Zeghloul CFMR A

CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux



On utilise en général deux lois de propagation de type Paris : une pour les fissures longues $(da/dN)^{FL}$ et une pour les fissures courtes $(da/dN)^{FC}$ tronquée dans ce dernier cas à :

 $\Delta K_{e\!f\!f.seuil}^{FL}$

A. Zeghloul

TD15 : Calcul de durée de vie en fatigue à partir des courbes de propagation

1- Dans un élément de structure en acier de ténacité K_{IC} =70MPa \sqrt{m} , les essais de propagation, à partir d'une longueur initiale a_0 =0,2mm, ont donné les

$$\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} \Delta K_R^{2,3} \text{ où } \Delta K_R = \frac{1 - bR}{1 - R} \Delta K \text{ avec } \begin{cases} b = 0,2 \text{ à } R < 0 \\ b = 1 \text{ à } R \ge 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} da/dN \text{ en } m/\text{ cycle} \\ \Delta K \text{ en } MPa\sqrt{m} \end{cases}$$

Pour le calcul du FIC, on adopte la relation $K = \sigma \sqrt{\pi a}$

Un lot d'éléments identiques subissent, après amorçage d'une fissure de longueur a_0 , différents chargements. Déterminer la durée de vie $N_{\mbox{\tiny P}}$ pour les chargements suivants :

a-
$$\Delta \sigma = 200MPa$$
 - $R = 0$ b- $\Delta \sigma = 360MPa$ - $R = -1$ c- 1 cycle $\Delta \sigma = 200MPa$ - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta \sigma = 360MPa$ - $R = -1$ d- 3 cycles $\Delta \sigma = 150MPa$ - $R = 0.5$ suivis de 5 cycles $\Delta \sigma = 300MPa$ - $R = -0.5$

• La durée de vie se calcule par intégration entre la longueur initiale $a_0 = 0,2mm$ et une longueur critique a, qu'il convient de déterminer pour chaque chargement considéré :

$$K_{I_C} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi a_c} = \frac{\Delta \sigma}{1 - R} \sqrt{\pi a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(1 - R)K_{I_C}}{\Delta \sigma} \right)^2 \begin{array}{c} \Delta \sigma = 200 MPa - R = 0 \\ \Delta \sigma = 360 MPa - R = -1 \\ \Delta \sigma = 150 MPa - R = 0, 5 \\ \Delta \sigma = 300 MPa - R = 0, 5 \\ \Delta \sigma = 300 MPa - R = -0, 5 \\ \Rightarrow a_c = 17, 3mm, \\ \Delta \sigma = 300 MPa - R = -0, 5 \\ \Rightarrow a_c = 39, 0mm. \\ a_C = 300 MPa - R = 0 \\ \Rightarrow a_c = 39, 0mm. \\ a_C = 300 MPa - R = 0, 5 \\ \Rightarrow a_c = 39, 0mm. \\ \Rightarrow a_C = 300 MPa - R = 0, 5 \\ \Rightarrow a$$

a-
$$\Delta \sigma = 200 MPa$$
 - $R = 0$ $\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(200 \sqrt{\pi a}\right)^{2,3} = C_1 a^{1,15}$ où $C_1 = 5,65 \cdot 10^{-5}$

$$N_{p} = \int_{0,2\cdot 10^{-3}}^{39\cdot 10^{-3}} \frac{da}{C_{1}a^{1.15}} = \frac{1}{0,15C_{1}} \left(\frac{1}{(0,2\cdot 10^{-3})^{0.15}} - \frac{1}{(39\cdot 10^{-3})^{0.15}} \right) \Rightarrow N_{p} = 2,32\cdot 10^{5} \text{ cycles}$$

$$b - \Delta\sigma = 360MPa - R = -1 \qquad \frac{da}{dN} = 7,72\cdot 10^{-11} \left(0,6\cdot 360\sqrt{\pi a} \right)^{2.3} = C_{2}a^{1.15}$$

$$\text{où } C_{2} = 6,74\cdot 10^{-5}$$

b-
$$\Delta \sigma = 360 MPa - R = -1$$
 $\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(0,6 \cdot 360 \sqrt{\pi a}\right)^{2.3} = C_2 a^{1.15}$ où $C_2 = 6,74 \cdot 10^{-5}$

$$N_P = \frac{1}{0.15C_2} \left(\frac{1}{\left(0.2 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(48.1 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \Longrightarrow N_P = 1.99 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

c- 1 cycle $\Delta \sigma = 200 MPa$ - R=0 suivi 2 cycles $\Delta \sigma = 360 MPa$ - R=-1; on calcule la vitesse moyenne sur le spectre, soit :

$$\frac{da}{dN}\bigg)_{moy} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(\frac{200^{2,3} + 2(0,6 \cdot 360)^{2,3}}{3}\right) \pi^{1,15} a^{1,15} = C_3 a^{1,15} \text{ où } C_3 = 6,37 \cdot 10^{-5}$$

$$N_{p} = \frac{1}{0.15C_{3}} \left(\frac{1}{\left(0.2 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(39 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \Rightarrow N_{p} = 2.05 \cdot 10^{5} \text{ cycles}$$

d- 3 cycles $\Delta \sigma = 150MPa$ - R = 0.5 suivis de 5 cycles $\Delta \sigma = 300MPa$ - R = -0.5

$$\frac{da}{dN}\bigg)_{moy} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3 \cdot 150^{2,3} + 5(\frac{1,1}{1,5} \cdot 300)^{2,3}}{8} \right) \pi^{1,15} a^{1,15} = C_4 a^{1,15} \text{ où } C_4 = 5,49 \cdot 10^{-5}$$

$$N_{p} = \frac{1}{0.15C_{4}} \left(\frac{1}{\left(0.2 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(17.3 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \qquad \Rightarrow N_{p} = 2.13 \cdot 10^{5} \, cycles$$

A. Zeghloul CFMR Application de la MLR à la fatigue des matériaux 4

2- La propagation en fatigue dans l'acier de l'exemple précédent est plus rapide pour les fissures courtes (0,2mm < a < 1mm). La loi de fissuration pour le régime fissures courtes (FC) est :

$$\left. \frac{da}{dN} \right|_{FC} = 10^{-9} \left(\Delta K_R^{FC} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta K_R^{FC} = \left(\frac{\Delta K}{1 - cR} \right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = 1 & \text{à} \quad R < 0 \\ c = 0 & \text{a} \quad R \ge 0 \end{cases}$$

Mêmes questions que celles de l'exemple 1-

a-
$$\Delta \sigma = 200 MPa - R = 0$$
 b- $\Delta \sigma = 360 MPa - R = -1$

c- 1 cycle
$$\Delta \sigma = 200MPa$$
 - $R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta \sigma = 360MPa$ - $R = -1$

d- 3 cycles
$$\Delta \sigma = 150 MPa$$
 - $R = 0.5$ suivis de 5 cycles $\Delta \sigma = 300 MPa$ - $R = -0.5$

a-
$$\Delta \sigma = 200 MPa$$
 - $R = 0$ $\frac{da}{dN}\Big|_{FC} = 10^{-9} \left(200\sqrt{\pi a}\right)^2 = C_1' a$ où $C_1' = 1,26 \cdot 10^{-4}$

$$N_{p} = \int_{0,210^{-3}}^{1\cdot10^{-3}} \frac{da}{C_{1}'a} + \int_{1\cdot10^{-3}}^{39\cdot10^{-3}} \frac{da}{C_{1}a^{1.15}} = \frac{1}{C_{1}'} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_{1}} \left(\frac{1}{\left(1\cdot10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(39\cdot10^{-3}\right)^{0.15}} \right)$$

$$\Rightarrow N_p = 1,53 \cdot 10^5$$
 cycles

b-
$$\Delta \sigma = 360 MPa$$
 - $R = -1$ $\frac{da}{dN}\Big|_{FC} = 10^{-9} \left(\frac{360}{2} \sqrt{\pi a}\right)^2 = C_2 a$ où $C_2 = 1,02 \cdot 10^{-4}$

b-
$$\Delta \sigma = 360 MPa - R = -1$$
 $\frac{da}{dN} \Big|_{FC} = 10^{-9} \left(\frac{360}{2} \sqrt{\pi a} \right)^2 = C_2 a \text{ où } C_2 = 1,02 \cdot 10^{-4}$

$$N_P = \frac{1}{C_2} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_2} \left(\frac{1}{\left(1 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(48,1 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \implies N_P = 1,39 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

c- 1 cycle $\Delta \sigma = 200MPa$ - R = 0 suivi 2 cycles $\Delta \sigma = 360MPa$ - R = -1; on calcule 1a vitesse moyenne sur le spectre pour les deux lois de propagation (fissures courtes et

$$\frac{da}{dN}\bigg|_{moy}^{FC} = 10^{-9} \left(\frac{200^2 + 2(360/2)^2}{3}\right) \pi a = C_3' a \text{ où } C_3' = 1,10 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{p} = \frac{1}{C_{3}^{'}} \ln \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.15C_{3}} \left(\frac{1}{\left(1 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(39 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \qquad \Rightarrow N_{p} = 1.39 \cdot 10^{5} cycles$$

d- 3 cycles $\Delta \sigma = 150MPa$ - R = 0.5 suivis de 5 cycles $\Delta \sigma = 300MPa$ - R = -0.5

$$\frac{da}{dN}\bigg|_{mov}^{FC} = 10^{-9} \left(\frac{3 \cdot 150^2 + 5(300/1, 5)^2}{8} \right) \pi a = C_4' a \text{ où } C_4' = 1,05 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{p} = \frac{1}{C_{4}^{'}} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15C_{4}} \left(\frac{1}{\left(1 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} - \frac{1}{\left(17,3 \cdot 10^{-3}\right)^{0.15}} \right) \implies N_{p} = 1,34 \cdot 10^{5} cycles$$