Master Mécanique Matériaux Structures Procédés
Examen 2e session cours OP5 – CFMR, Jeudi 16 Février 2017
Durée 2h – Poly et transparents de cours autorisés

I Mesures de ténacité

Une série d'essais sur des éprouvettes d'épaisseur e =1mm préfissurées en mode I à différentes longueurs de fissure, a été effectuée pour déterminer la ténacité d'un acier. Les charges P et les déplacements u enregistrés en fonction des longueurs fissurées a au cours des essais, sont :

$a(mm)$	$P(kN)$	$u(mm)$
$25,0$	$4,50$	$0,35$
$37,0$	$3,75$	$0,45$
$47,0$	$3,30$	$0,56$
$57,5$	$3,00$	$0,70$
$69,5$	$2,70$	$0,87$
$77,5$	$2,60$	$1,00$

Calculer la valeur moyenne en KJ/m^2 de la ténacité G_{Ic} de l'acier par les deux méthodes :

$$G_{Ic} = \frac{1}{2e}\frac{P_i u_j - P_j u_i}{a_j - a_i} \qquad \text{et} \qquad G_{Ic} = \frac{P^2}{2e}\frac{dC}{da}$$

où $C = u/P$ est la complaisance de l'éprouvette. Pour la deuxième méthode, on présentera sous forme de tableau les valeurs de la complaisance C, des variations dC/da et des ténacités calculées G_{Ic}.

II Calcul de durées de vie

Les essais de propagation en fatigue d'un acier à rail de ténacité $K_{Ic} = 75\text{MPa}\sqrt{m}$, sollicité à différents rapports de charge R, ont donné les résultats suivants :

$$\frac{da}{dN} = C\left(\frac{\Delta K}{(1-R)^\gamma}\right)^m \qquad \text{et} \qquad \Delta K_{seuil}(R) = \Delta K_{seuil}(0)(1-R)^\gamma$$

avec $C = 4 \cdot 10^{-12}$, $m = 3$ et $\gamma = 0.6$, la vitesse da/dN étant exprimée en m/cycle et $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}$ en MPa$\sqrt{m}$.

1- Sachant que le seuil est atteint pour une vitesse de $8.64 \cdot 10^{-10}$ m/cycle à $R = 0$, déterminer $\Delta K_{seuil}(0)$. En déduire ΔK_{seuil} à $R = 0.1$, $R = 0.3$ et $R = 0.5$.

2- Le rail est soumis à $R = 0.1$ à l'amplitude de contrainte $\Delta\sigma$=150 MPa. Déterminer le nombre de cycles à rupture, sachant que les moyens de contrôle non destructifs (CND) ne permettent pas de détecter des fissures de longueur $a < 0.5$mm.

3- Le rail subit 250 cycles de charges par jour, d'amplitude $\Delta\sigma$=150 MPa à R=0.1. Quelle est la longueur maximale de fissure atteinte au bout de 4 ans ?

4- Le rail subit 250 cycles/jour qui se décomposent de la façon suivante :

50 cycles à R=0.1 $\Delta\sigma$=150 MPa
100 cycles à R=0.3 $\Delta\sigma$=120 MPa
100 cycles à R=0.5 $\Delta\sigma$=90 MPa

Quelle est la longueur maximale de fissure atteinte au bout de 4 ans ?

Corrigé

I Mesures de ténacité

Première méthode $G_{Ic} = \dfrac{1}{2e}\dfrac{P_i u_j - P_j u_i}{a_j - a_i}$, ce calcul s'effectuant entre deux longueurs de fissure a_i et a_j. Les valeurs de la ténacité en fonction de l'intervalle de calcul $a_i - a_j$ sont :

$a_i - a_j(mm)$	$G_{Ic}(KN/m^2)$
$25,0 - 37,0$	$29,69$
$37,0 - 47,0$	$30,75$
$47,0 - 57,5$	$30,00$
$57,5 - 69,5$	$30,00$
$69,5 - 77,5$	$27,38$

La valeur moyenne est $G_{Ic}^m = 29,56 \pm 1,28 KJ/m^2$.

Deuxième méthode $G_{Ic} = \dfrac{P^2}{2e}\dfrac{dC}{da}$. On calcule dans un premier temps les cmplaisances $C = u/P$:

$a(mm)$	$25,0$	$37,0$	$47,0$	$57,5$	$69,5$	$77,5$
$C(10^{-7}m/N)$	$0,78$	$1,20$	$1,70$	$2,33$	$3,22$	$3,85$

On calcule ensuite les valeurs de la variation de complaisance dC/da entre deux longueurs de fissure a_i et a_j. Les valeurs de dC/da et de G_{Ic}, en fonction de l'intervalle de calcul $a_i - a_j$, sont :

$a_i - a_j(mm)$	$25 - 35$	$35 - 47$	$47 - 57,5$	$57,5 - 69,5$	$69,5 - 77,5$
$\dfrac{dC}{da}(10^{-6}N^{-1})$	$3,50$	$5,00$	$6,00$	$7,42$	$7,88$
$G_{Ic}(KJ/m^2)$	$35,44$	$35,15$	$32,67$	$33,39$	$28,72$

La valeur moyenne est $G_{Ic}^m = 33,07 \pm 2,7 KJ/m^2$.

II Durées de vie en fatigue d'un acier à rail

La ténacité de l'acier est $K_{Ic} = 75MPa\sqrt{m}$. La loi de fissuration da/dN et le seuil de non fissuration ΔK_{seuil} sont donnés par :

$$\frac{da}{dN} = 4 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\Delta K}{(1-R)^{\gamma}} \right)^3 \qquad \Delta K_{seuil}(R) = \Delta K_{seuil}(0)(1-R)^{\gamma}$$

II.1 $\Delta K_{seuil}(0)$ atteint à $da/dN = 8,64 \cdot 10^{-10}$m/cycle $\Rightarrow \Delta K_{seuil}(0) = 6MPa\sqrt{m}$.

$$\begin{aligned} \Delta K_{seuil}(0,1) &= 5,63MPa\sqrt{m} \\ \Delta K_{seuil}(0,3) &= 4,84MPa\sqrt{m} \\ \Delta K_{seuil}(0,5) &= 3,96MPa\sqrt{m} \end{aligned}$$

II.2 Nombre de cycles à rupture N_R pour $\Delta\sigma = 150$MPa à $R = 0,1$ ($a_0 = 0,5$mm).

$$\Delta K_{ini} = 150\sqrt{\pi a_0} = 5,94MPa\sqrt{M} > \Delta K_{seuil}(0,1) \text{ la fissure se propage donc}$$

$$K_{Ic} = K_{max} = \frac{150\sqrt{\pi a_c}}{0,9} \quad \Rightarrow \quad a_c = 64,5mm$$

$$\frac{da}{dN} = 4 \cdot 10^{-12} \left(\frac{150\sqrt{\pi a}}{(0,9)^{\gamma}} \right)^3 = C' a^{1,5} \text{ avec } C' = 9,09 \cdot 10^{-5}$$

$$N_R = \frac{1}{0,5C'} \left[\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_c}} \right]$$

soit $N_R = 8,97 \cdot 10^5 cycles$.

II.3 Chargement de 250 cycles/jour à $\Delta\sigma = 150$MPa et $R = 0,1$.

Calcul de la longueur atteinte au bout de 4 ans.

on a $N_{4ans} = 250 \cdot 365 \cdot 4 = 3,65 \cdot 10^5$cycles.

$$N_{4ans} = \frac{1}{0,5C'} \left[\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_{4ans}}} \right]$$

Soit $a_{4ans} = 1,26mm$.

II.4 250 cycles/jour avec spectre de charge :

$$\begin{aligned} &50 \text{ cycles à } R = 0.1, \Delta\sigma = 150MPa \ \mathbf{(1)} \\ &100 \text{ cycles à } R = 0.3, \Delta\sigma = 120MPa \ \mathbf{(2)} \\ &100 \text{ cycles à } R = 0.5, \Delta\sigma = 90MPa \ \mathbf{(3)} \end{aligned}$$

Le chargement **(1)**, traité dans la question **II.2**, est endommageant dès le début.

Pour les chargements **(2)** et **(3)**, on calcule les valeurs initiales du ΔK que l'on compare au ΔK_{seuil}.

$$\Delta K_{ini}^{(2)} = 120\sqrt{\pi a_0} = 4,76MPa\sqrt{m} < \Delta K_{seuil}(0,3) = 4,84MPa\sqrt{m}$$

Le chargement **(2)** non endommageant donc au début, le devient pour $a_{seuil}^{(2)} = (4,84/120)^2/\pi = 0,518$mm.

$$\Delta K_{ini}^{(3)} = 90\sqrt{\pi a_0} = 3,57MPa\sqrt{m} < \Delta K_{seuil}(0,5) = 3,96MPa\sqrt{m}$$

Le chargement **(3)** non endommageant donc au début, le devient pour $a_{seuil}^{(3)} = (3,96/90)^2/\pi = 0,616$mm.

Pour $a_0 < a < 0,518$mm :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{moy} = \frac{da_1}{250} = \frac{50 \cdot 4 \cdot 10^{-12}\left(\frac{150\sqrt{\pi a}}{(0,9)^{0.6}}\right)^3}{250} = C_1 a^{1.5} \text{ avec } C_1 = 1,82 \cdot 10^{-5}$$

Pour $0,518 < a < 0,616$mm :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{moy} = \frac{da_1 + da_2}{250} = \frac{da_1 + 100 \cdot 4 \cdot 10^{-12}\left(\frac{120\sqrt{\pi a}}{(0,7)^{0.6}}\right)^3}{250} = C_2 a^{1.5} \text{ avec } C_2 = 4,74 \cdot 10^{-5}$$

Pour $a > 0,616$mm :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{moy} = \frac{da_1 + da_2 + da_3}{250} = C_3 a^{1.5} \text{ avec } C_3 = 8,82 \cdot 10^{-5}$$

$N_{4ans} = 3,65 \cdot 10^5$cycles, il s'agit maintenant de voir si les trois régimes de propagation sont tous opérants ou non.

$$N_1 = \frac{1}{0,5C_1}\left[\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_{seuil}^{(2)}}}\right] = 8,61 \cdot 10^4 cycles < N_{4ans}$$

$$N_2 = \frac{1}{0,5C_2}\left[\frac{1}{\sqrt{a_{seuil}^{(2)}}} - \frac{1}{\sqrt{a_{seuil}^{(3)}}}\right] = 1,54 \cdot 10^5 cycles (N_1 + N_2 < N_{4ans})$$

Les trois régimes sont donc tous opérants.

Calcul de a_{4ans} :

$$N_{4ans} = N_1 + N_2 + \frac{1}{0,5C_3}\left[\frac{1}{\sqrt{a_{seuil}^{(3)}}} - \frac{1}{\sqrt{a_{4ans}}}\right]$$

Soit $a_{4ans} = 0,827\text{mm}$.