Master Mécanique Matériaux Structures Procédés
Examen cours OP5 – CFMR, Lundi 16 janvier 2017
Durée 2h – Poly et transparents de cours autorisés

I Une plaque en acier de module d'Young $E = 210000$MPa, de limite d'élasticité $\sigma_E = 300$MPa et de taille de grain $d_g = 20\mu m$, a un comportement plastique bilinéaire avec un module plastique $E_p = E/20$. La plaque est chargée à $\sigma_{nom} = 100$MPa et comporte une entaille elliptique $a = 3cm$ et $b = 2cm$.

I.1 Calculer à partir de l'hypothèse de Neuber, la contrainte maximale et la contrainte résiduelle après déchargement de la plaque, atteintes à la racine de l'entaille ; en déduire les facteurs de concentration K_σ et K_ϵ.

I.2 Déterminer la contrainte maximale dans le troisième grain adjacent à la racine de l'entaille et la contrainte résiduelle après décharge. Pour cette question, on linéarisera la relation :

$$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)_{x=a} = -\left(2 + \frac{1}{K_\sigma}\right)\frac{\sigma_{max}}{\rho}$$

II Les essais de fatigue d'un alliage d'aluminium de ténacité $K_{Ic} = 60\text{MPa}\sqrt{m}$, sollicité en traction répétée pour différents rapports de charge R, ont montré que la valeur seuil de l'amplitude de l'intensité des contraintes s'exprimait par :

$$\Delta K_{seuil} = \Delta K_0 (1-R)^{0.8} \quad \text{avec} \quad \Delta K_0 = 2,5 MPa\sqrt{m} \quad \text{valeur seuil à } R = 0$$

Ces essais ont mis en évidence l'existence de deux régimes de propagation :

- l'un pour les fissures courtes (FC) décrit par la relation suivante :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-11}\Delta K^{2.2} \quad \text{pour} \quad a \leq 1mm$$

- l'autre pour les fissures longues(FL) décrit par :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FL} = 10^{-12}\Delta K_R^4 \quad \text{pour} \quad a > 1mm \quad \text{avec} \quad \Delta K_R = \frac{\Delta K}{1-R}$$

La vitesse da/dN est exprimée en $m/cycle$ et ΔK en MPa$\sqrt{m}$. L'amplitude du facteur d'intensité des contraintes est calculée par $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}$.

II.1 Calculer σ_{max} et la longueur critique a_c pour :

a - $R = 0.1, \Delta\sigma = 50$MPa et $60MPa$

b - $R = 0.5, \Delta\sigma = 30$MPa et $40MPa$

On présentera les résultats dans un tableau où l'on indiquera en dernière colonne la valeur de ΔK_{seuil}.

II.2 Les éprouvettes testées contiennent des fissures de longueur initiale $a_0 = 0,5mm$. Déterminer le nombre de cycles à rupture pour chacun des spectres de chargement suivants :

a- 50 cycles à $\Delta\sigma = 60$MPa et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 40$MPa et $R = 0.5$

b- 50 cycles à $\Delta\sigma = 50$MPa et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 40$MPa et $R = 0.5$

c- 50 cycles à $\Delta\sigma = 60$MPa et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 30$MPa et $R = 0.5$

II.3 L'alliage étudié est utilisé dans la construction d'un avion. Les moyens de contrôle utilisés ne pouvant déceler des fissures de dimension inférieure à $0,5mm$, calculer la longueur maximum atteinte si le contrôle est fait au bout d'un an ; pendant cette période, l'avion effectue 2 vols/jour et subit en moyenne au cours de chaque vol, 1000 spectres de charges, constitué chacun de :

- 1 cycle à $\Delta\sigma = 50$MPa - $R = 0.1$, 1 cycle à $\Delta\sigma = 60$MPa - $R = 0.1$

- 1 cycle à $\Delta\sigma = 30$MPa - $R = 0.5$, 1 cycle à $\Delta\sigma = 40$MPa - $R = 0.5$

Corrigé

I.1

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b} = 4 \Rightarrow \sigma_{max} = K_t\sigma_{nom} = 400\text{MPa} > \sigma_E \quad \text{(plastification)}$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma - 300 = \frac{E}{20}\left(\epsilon - \frac{300}{E}\right)$$

La contrainte maximale, notée σ_A, atteinte à la racine de l'entaille, est solution de :

$$\sigma_A = 300 + \frac{E}{20}\left(\epsilon_A - \frac{300}{E}\right) = 300 + \frac{E}{20}\left(\frac{(K_t\sigma_{nom})^2}{E\sigma_A} - \frac{300}{E}\right)$$

soit

$$\sigma_A^2 - 285\sigma_A - 8000 = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 310,74 \text{ MPa}} \text{ et } \boxed{\sigma_{res} = \sigma_A - 400 = -89,26 \text{ MPa}}$$

Les facteurs de concentration plastiques valent respectivement :

$$\boxed{K_\sigma = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}} = 3,11} \quad \text{et} \quad \boxed{K_\epsilon = \frac{K_t^2}{K_\sigma} = 5,15}$$

I.2 On calcule directement la contrainte atteinte au milieu du 3e grain, σ_m^{3g}, distant de $50\mu m$, en linéarisant la relation donnée, soit :

$$\frac{\sigma_m^{3g} - \sigma_A}{50\ 10^{-6}} = -\left(2 + \frac{1}{K_\sigma}\right)\frac{\sigma_A}{\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{b^2}{a} = 1,33\ 10^{-2}m$$

d'où

$$\sigma_m^{3g} = 308,03\text{MPa}$$

On détermine ensuite la contrainte maximale atteinte dans le cas élastique, au milieu du 3e grain, σ_{max}^{3g}, soit :

$$\frac{\sigma_{max}^{3g} - \sigma_{max}}{50\ 10^{-6}} = -\left(2 + \frac{1}{K_t}\right)\frac{\sigma_{max}}{1.33\ 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max}^{3g} = 396,6 \text{ MPa}}$$

et

$$\boxed{\sigma_{res}^{3g} = \sigma_m^{3g} - \sigma_{max}^{3g} = -88,6 \text{ MPa}}$$

II Fissuration d'un alliage utilisé dans l'industrie aéronautique $K_{Ic} = 60\text{MPa}\sqrt{m}$.

II.1 Calcul de σ_{max} et a_c

a - $R = 0.1, \Delta\sigma = 50\text{MPa}$ et 60MPa

$$a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{0,9K_{Ic}}{\Delta\sigma}\right)^2, \text{ soit } a_c = (50\text{MPa}) = 371,3mm \quad a_c = (60\text{MPa}) = 257,8mm$$

b - $R = 0.5, \Delta\sigma = 30\text{MPa}$ et 40MPa

$$a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{0,5K_{Ic}}{\Delta\sigma}\right)^2, \text{ soit } a_c = (30\text{MPa}) = 318,3mm \quad a_c = (40\text{MPa}) = 179mm$$

Rapport R	$\Delta\sigma$(MPa)	a_c (mm)	$\Delta K_{seuil}(\text{MPa}\sqrt{m})$
0,1	50	371,3	2,3
	60	257,8	
0,5	30	318,3	1,44
	40	179	

II.2 $a_0 = 0,5\text{mm}$, calcul du nombre de cycles à rupture, N_R

a- 50 cycles à $\Delta\sigma = 60\text{MPa}$ et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 40\text{MPa}$ et $R = 0.5$

Il faut dans un premier temps calculer a_{seuil}, longueur de fissure au dessus de laquelle la fissure se propage.

$$a_{seuil} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{seuil}}{\delta\sigma}\right)^2$$

Pour $\Delta\sigma = 60\text{MPa}$ et $R = 0.1$, $a_{seuil} = 0,468\text{mm}$
Pour $\Delta\sigma = 40\text{MPa}$ et $R = 0.5$, $a_{seuil} = 0,413\text{mm}$

La fissure de taille initiale $a_0 = 0,5\text{mm}$ se propagera donc pour les deux chargements ci-dessus.

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{da_1 + da_2}{150} = \frac{50\ 10^{-11}(60\sqrt{\pi a})^{2.2} + 100\ 10^{-11}(40\sqrt{\pi a})^{2.2}}{150} = C_1 a^{1.1}$$

avec $C_1 = 1,74\ 10^{-7}$

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{moy} = \frac{da_1 + da_2}{150} = \frac{50\ 10^{-12}(\frac{60}{0,9}\sqrt{\pi a})^4 + 100\ 10^{-12}(\frac{40}{0,5}\sqrt{\pi a})^4}{150} = C_2 a^2$$

avec $C_2 = 3,34\ 10^{-4}$

Calcul du nombre de cycles à rupture N_R (la rupture interviendra pour $a_c = 179$mm)

$$N_R = \int_{a_0}^{1mm} \frac{da}{C_1 a^{1.1}} + \int_{1mm}^{a_c} \frac{da}{C_2 a^2}$$
$$= \frac{1}{0{,}1 C_1}\left[\frac{1}{(0{,}5\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(10^{-3})^{0,1}}\right] + \frac{1}{C_2}\left[\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{179\ 10^{-3}}\right]$$

$$\Rightarrow N_R = 8,23\ 10^6 + 2,98\ 10^6 = 1,12\ 10^7$$

b- 50 cycles à $\Delta\sigma = 50$MPa et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 40$MPa et $R = 0.5$

Calcul de a_{seuil}, longueur de fissure au dessus de laquelle la fissure se propage.

$$a_{seuil} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{seuil}}{\delta\sigma}\right)^2$$

Pour $\Delta\sigma = 50$MPa et $R = 0.1$, $a_{seuil} = 0,674$mm
Pour $\Delta\sigma = 40$MPa et $R = 0.5$, $a_{seuil} = 0,413$mm

La fissure de taille initiale $a_0 = 0,5$mm se propagera pour le 2^e chargement et il faut attendre que sa longueur atteigne $0,674$mm pour que le 1^e chargement devienne aussi endommageant.

Pour $0,5 \leq a < 0,674$mm

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{100\ 10^{-11}(40\sqrt{\pi a})^{2.2}}{150} = C_1' a^{1.1}$$

avec $C_1' = 7,86\ 10^{-8}$

Pour $0,674 \leq a < 1$mm

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{50\ 10^{-11}(50\sqrt{\pi a})^{2.2} + 100\ 10^{-11}(40\sqrt{\pi a})^{2.2}}{150} = C"_1 a^{1.1}$$

avec $C"_1 = 1,43\ 10^{-7}$

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{moy} = \frac{50\ 10^{-12}(\frac{50}{0{,}9}\sqrt{\pi a})^4 + 100\ 10^{-12}(\frac{40}{0{,}5}\sqrt{\pi a})^4}{150} = C_2 a^2$$

avec $C_2 = 3,01\ 10^{-4}$

Calcul du nombre de cycles à rupture N_R (la rupture interviendra pour $a_c = 179$mm)

$$N_R = \int_{a_0}^{0,674} \frac{da}{C'_1 a^{1.1}} + \int_{0,674}^{1} \frac{da}{C"_1 a^{1.1}} + \int_{1}^{a_c} \frac{da}{C_2 a^2}$$
$$= \frac{1}{0,1C'_1}\left[\frac{1}{(0,5\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(0,674\ 10^{-3})^{0,1}}\right] + \frac{1}{0,1C"_1}\left[\frac{1}{(0,674\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(10^{-3})^{0,1}}\right]$$
$$+\frac{1}{C_2}\left[\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{179\ 10^{-3}}\right]$$

$$\Rightarrow N_R = 8,00\ 10^6 + 5,61\ 10^6 + 3,30\ 10^6 = 1,69\ 10^7$$

c- 50 cycles à $\Delta\sigma = 60$MPa et $R = 0.1$, et 100 cycles à $\Delta\sigma = 30$MPa et $R = 0.5$

Calcul de a_{seuil}, longueur de fissure au dessus de laquelle la fissure se propage.

$$a_{seuil} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{seuil}}{\delta\sigma}\right)^2$$

Pour $\Delta\sigma = 60$MPa et $R = 0.1$, $a_{seuil} = 0,468$mm
Pour $\Delta\sigma = 30$MPa et $R = 0.5$, $a_{seuil} = 0,708$mm

La fissure de taille initiale $a_0 = 0,5$mm se propagera pour le 1^e chargement et il faut attendre que sa longueur atteigne $0,708$mm pour que le 2^e chargement devienne aussi endommageant.

Pour $0,5 \leq a < 0,708$mm

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{50\ 10^{-11}(60\sqrt{\pi a})^{2.2}}{150} = C'_1 a^{1.1}$$

avec $C'_1 = 9,59\ 10^{-8}$

Pour $0,708 \leq a < 1$mm

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{50\ 10^{-11}(60\sqrt{\pi a})^{2.2} + 100\ 10^{-11}(30\sqrt{\pi a})^{2.2}}{150} = C"_1 a^{1.1}$$

avec $C"_1 = 1,38\ 10^{-7}$

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{moy} = \frac{50\ 10^{-12}(\frac{60}{0,9}\sqrt{\pi a})^4 + 100\ 10^{-12}(\frac{30}{0,5}\sqrt{\pi a})^4}{150} = C_2 a^2$$

avec $C_2 = 1,50\ 10^{-4}$

Calcul du nombre de cycles à rupture N_R (la rupture interviendra pour $a_c = 257,8$mm)

$$N_R = \int_{a_0}^{0,708} \frac{da}{C_1' a^{1.1}} + \int_{0,708}^{1} \frac{da}{C"_1 a^{1.1}} + \int_{1}^{a_c} \frac{da}{C_2 a^2}$$
$$= \frac{1}{0,1C_1'}\left[\frac{1}{(0,5\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(0,708\ 10^{-3})^{0,1}}\right] + \frac{1}{0,1C"_1}\left[\frac{1}{(0,708\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(10^{-3})^{0,1}}\right]$$
$$+\frac{1}{C_2}\left[\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{267,8\ 10^{-3}}\right]$$

$$\Rightarrow N_R = 7,62\ 10^6 + 5,08\ 10^6 + 6,64\ 10^6 = 1,93\ 10^7$$

II.3 Application à la durée de vie d'un avion

Nombre de cycles au bout d'un an : $N_{1an} = 4 * 2 * 1000 * 365 = 2,92\ 10^6$

Spectre composé de 4 chargements :

- 1 cycle à $\Delta\sigma = 50$MPa - $R = 0,1$ **(1)** ; 1 cycle à $\Delta\sigma = 60$MPa - $R = 0,1$ **(2)**
- 1 cycle à $\Delta\sigma = 30$MPa - $R = 0,5$ **(3)** ; 1 cycle à $\Delta\sigma = 40$MPa - $R = 0,5$ **(4)**

Seuls les chargements **(2)** et **(4)** sont endommageants au début. Le chargement **(1)** le devient à $a_{seuil} = 0,674$mm et le chargement **(3)** à $a_{seuil} = 0,708$mm.

$$\text{Pour } 0,5 \leq a < 0,674mm, \left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{da_2+da_4}{4} = C_1 a^{1,1}$$

$$\text{Pour } 0,674 \leq a < 0,708mm, \left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{da_1+da_2+da_4}{4} = C_2 a^{1,1}$$

$$\text{Pour } 0,708 \leq a < 1mm, \left(\frac{da}{dN}\right)_{FC}^{moy} = \frac{da_1+da_2+da_3+da_4}{4} = C_3 a^{1,1}$$

$$\text{Pour } a > 1mm, \left(\frac{da}{dN}\right)_{FL}^{moy} = \frac{da_1+da_2+da_3+da_4}{4} = C_4 a^2$$

avec $C_1 = 1,01\ 10^{-7}$, $C_2 = 1,50\ 10^{-7}$, $C_3 = 1,65\ 10^{-7}$ et $C_4 = 2,05\ 10^{-4}$.

Appelons :

$$N_{R1} = \frac{1}{0,1C_1}\left[\frac{1}{(0,5\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(0,674\ 10^{-3})^{0,1}}\right] = 6,23\ 10^6 > N_{1an}$$

La longueur de fissure a_{1an} atteinte au bout d'un an est inférieur à $0,674$mm.

Calcul de a_{1an} :

$$\frac{1}{0,1C_1}\left[\frac{1}{(0,5\ 10^{-3})^{0,1}} - \frac{1}{(a_{1an})^{0,1}}\right] = N_{1an}$$

$$\frac{1}{(0,5\ 10^{-3})^{0,1}} - 0,1C_1 N_{1an} = \frac{1}{(a_{1an})^{0,1}}$$

$$\Rightarrow a_{1an} = 0,574mm$$