Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 1 - Introduction

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

1

SOMMAIRE

Introduction

- **Phénomène de rupture**

- Existera aussi longtemps que l'on construira des structures
- Est de plus en plus crucial avec le progrès technologique
- Représente en pertes 3 à 4% du PIB des Pays Industrialisés

- **Deux catégories de rupture**

- Négligence dans la conception et l'utilisation des concepts (peut être évitée avec une bonne utilisation des concepts)
- Utilisation de nouveaux matériaux et/ou procédés (plus délicat à maîtriser)

- **Exemple des bateaux de la liberté**

- Nouveau procédé de construction (soudage et non rivetage)

- Procédé trois fois plus rapide et moins cher

➥Développement de fissures dans les joints de soudure

- Depuis, amélioration du procédé de soudage
- Et utilisation d'aciers de ténacité plus élevée

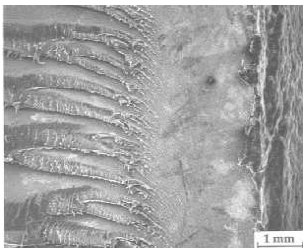
- **Autre exemple : utilisation des polymères**

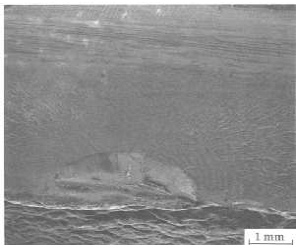
(Constitue un avantage par rapport aux matériaux métalliques)

- Conduite de gaz en polyéthylène
- Opérations de maintenance facilitées

(par pinçage des conduites pour intervention)

⇨ Développement de fissures dans les parties pincées





- Depuis, utilisation de nouvelles nuances de polymères
- Avec une plus faible densité

- **Catastrophes dues à la rupture (1)**

- Accident ferroviaire de Meudon le 8 mai 1842

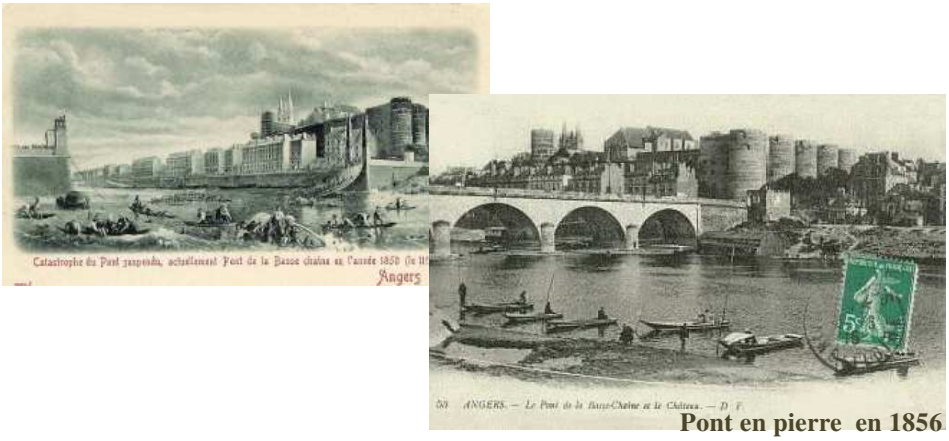
(1ère catastrophe de l'histoire ferroviaire)

L'accident avait pour origine la rupture d'un des essieux de la locomotive accidentée. William Rankine (1820-1872), en examinant les faciès de rupture des essieux brisés lors de l'accident, a montré que c'était une rupture par fatigue.

- **Catastrophes dues à la rupture (2)**

- Rupture du pont de la Basse-Chaîne a Angers (1850)

(Rupture due au phénomène de résonnance)

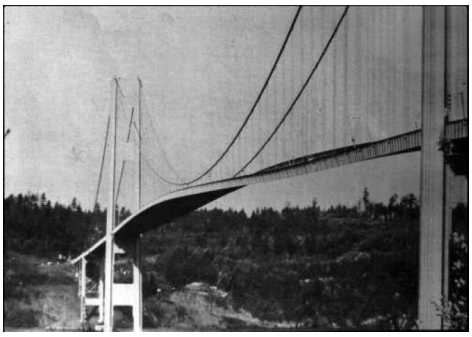


Pont en pierre en 1856

- **Catastrophes dues à la rupture (3)**

- Rupture du Takoma Narrow Bridge San Francisco 1940

(Rupture due au phénomène de résonnance)

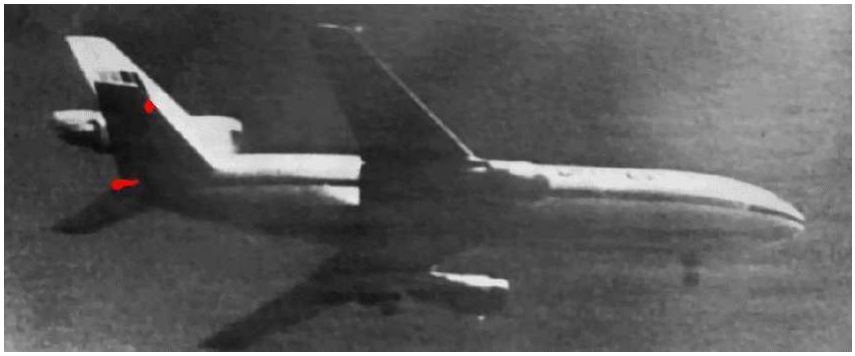


Le vent constant de 42 miles par heure (environ 68 km/h) a suffi à générer et à entretenir les vibrations du pont à la fréquence de résonance. Après une heure de vibrations en torsion, le pont a fini par s'écrouler.

- **Catastrophes dues à la rupture (4)**

- Accident du DC10 – Vol 232 United Airlines le 19-7-89

(Rupture due au phénomène de fatigue)

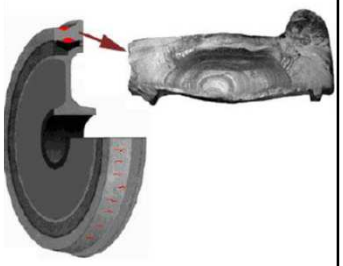


Rupture due à une crique de fatigue dans le métal d'une des aubes de la turbine et non détectée lors de la dernière inspection. L'origine de cette crique provient d'un défaut de fabrication de l'alliage composant l'aube.

- **Catastrophes dues à la rupture (5)**

Déraillement de l'ICE allemand en juin 1998 à Eschede

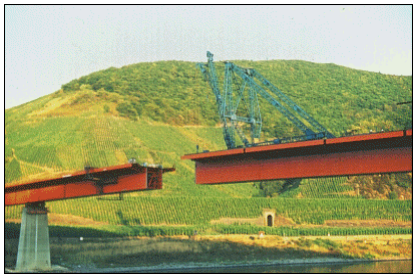
Provoqué par la rupture d'une roue fissurée



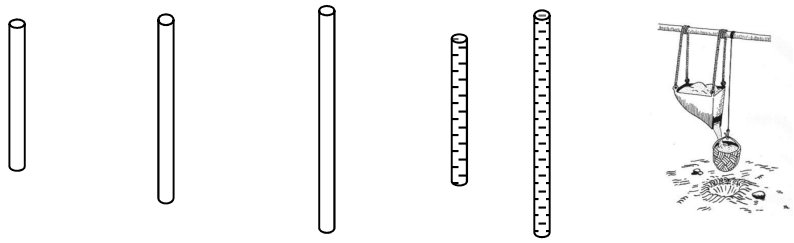
L'accident a été provoqué par la propagation d'une fissure de fatigue dans une roue à faible niveau sonore qui venait d'être mise en service.

- **Histoire de la rupture**

- L'histoire montre que l'homme a toujours essayé d'éviter la rupture
- Les structures anciennes étaient sollicitées en compression (Pyramides, Ponts romains ...)
- Pierre, brique, mortier … (matériaux fragiles en traction)
- Avant la révolution industrielle, chargements de compression
- Après, chargements en traction avec l'utilisation de l'acier...



- Problème de fissuration par fatigue ... avec rupture pour $\sigma < \sigma_E$
- Surdimensionnement, mais problème du poids
⇨ Développement de la mécanique de la rupture
- Premiers essais de Léonard de Vinci (15e siècle)



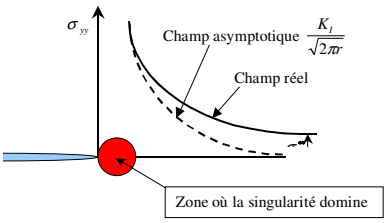
- La résistance à la traction variait inversement avec la longueur

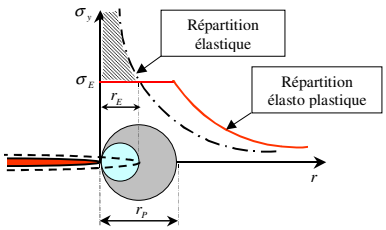
- Les défauts contrôlent la résistance ⇨ fil plus long : probabilité de rupture + ⇧

• Théorie de Griffith

- Interprétation qualitative des résultats de L. de Vinci précisée en 1920
- Griffith établit une relation directe entre la taille du défaut et σ_R
- Théorie de la rupture (Inglis, 1er principe de la thermodynamique)
- Rupture lorsque **ΔW** liée à la propagation d'une fissure atteint l'énergie spécifique γ_S du matériau
- Théorie valable pour les matériaux fragiles
- Pour les matériaux ductiles, outre γ_S intervient aussi γ_P
- En 1948, Irwin proposa une modification de cette théorie en introduisant γ_P dans le bilan énergétique
- En 1956, Irwin développa le concept de taux de restitution d'énergie G
- En 1957, concept de FIC K (Westergaard, Mushkhélishvili) pour décrire les champs de contrainte et de déformation à l'extrémité d'une fissure
- K et G, deux concepts de la MLR liés entre eux

- Depuis, utilisation des nouveaux concepts de la MR
- Fatigue : courbes d'endurance ⇨ courbes de propagation
- Intensification des recherches entre 1960 et 1980
- Affrontement de deux écoles



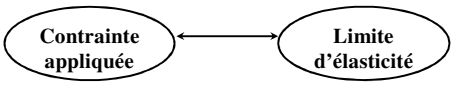


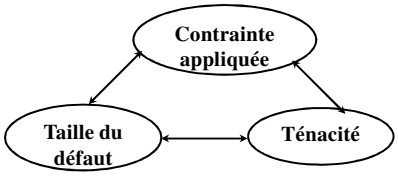
- Les tenants de l'approche MLR utilisant le FIC *K* (correction de ZP)

- Ceux qui s'intéressent à la plastification à fond de fissure (*CTOD*, *J*)

- Depuis les années 1980, les recherches s'intéressent :
- au comportement viscoplastique
(matériaux ductiles à haute température, fluage, fatigue-fluage)
- au comportement viscoélastique
(matériaux polymères)
- au comportement des composites
(délaminage, effets des impacts…)
- De nouvelles approches plus récentes tentent de relier le comportement microscopique local au comportement macroscopique global
(modèles micro-macro)

- **Utilisation de la mécanique de la rupture pour la conception des structures**





- Approche classique (2 paramètres)
- Dimensionnement de la structure pour que $\sigma_a < \sigma_E$

- Approche MLR (3 paramètres)
- Dimensionnement de la structure pour que $K < K_C$ (ou $G < G_C$)

- **Critère d'énergie**

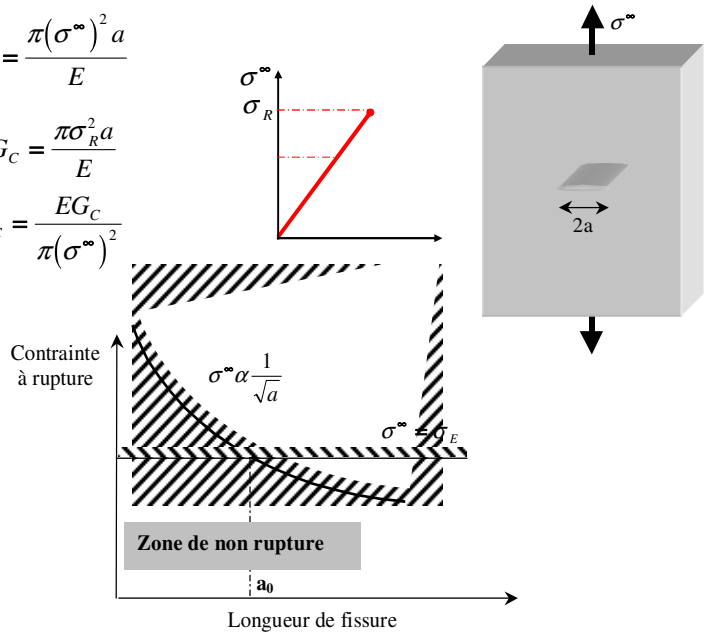
(Griffith pour les matériaux fragiles, Irwin - Orowan pour les ductiles)

- Propagation d'une fissure si l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau **(γ_S , γ_P ...)**
- Energie de Griffith G définie par la variation d'énergie - par unité de surface fissurée - associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique
- Critère : rupture lorsque G atteint une valeur critique G_C
- G_C est une mesure de la ténacité du matériau, c'est à dire sa capacité à résister à la propagation d'un défaut de type fissure (HF: Principe de similitude - G_C indépendante de la géométrie)
- Pour exprimer l'énergie G, on considère une plaque comportant une fissure de petite dimension (la plaque est un milieu infini lorsqu'on se place à l'échelle de la fissure)

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E}$$

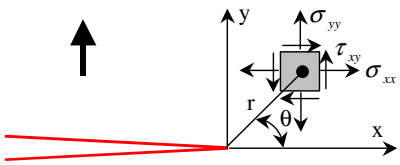
$$G_C = \frac{\pi\sigma_R^2 a}{E}$$

$$a_C = \frac{EG_C}{\pi(\sigma^\infty)^2}$$



Concept d'intensité des contraintes

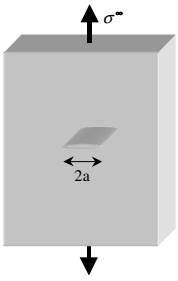
Ce concept est caractérisé par le FIC *K* - un paramètre unique pour décrire $\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} \\ \vec{u} \end{cases}$



$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

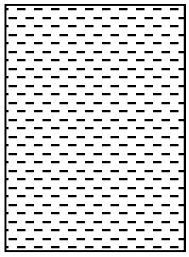


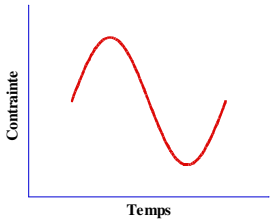
$$K_I = \sigma^\infty\sqrt{\pi a}$$

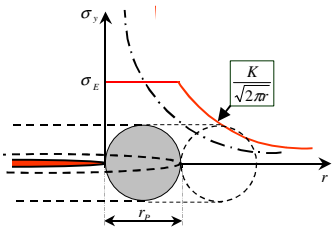
$$\Rightarrow \begin{cases} G = \dfrac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} = \dfrac{K_I^2}{E} \\ G_C = \dfrac{\pi\sigma_R^2 a}{E} = \dfrac{K_{Ic}^2}{E} \end{cases}$$

Concept de tolérance au dommage

Le FIC K est utilisé pour décrire la propagation des fissures





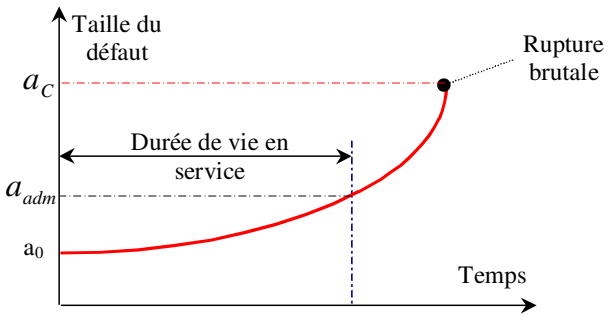


$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \textbf{(Loi de Paris)} \xrightarrow{\textbf{Cacul de la durée de vie}} N = \int_{a_0}^{a_C} \frac{da}{C(\Delta K)^m}$$

- ***Concept de tolérance au dommage***

- **On dimensionne les structures en tenant compte de la présence des fissures**
- **Et en tolérant leur propagation de la taille initiale à une taille admissible**

Concept de tolérance au dommage



Classification des concepts de la Mécanique de la Rupture en fonction de la nature des matériaux auxquels ils s'appliquent

- MLR
(Matériaux fragiles, plasticité confinée)
- **Alliages Alu à précipitation durcissante**
- **Aciers à haute σ_E**
- **Céramiques monolithique ou composite**

- MNLR ou MEPR
(Matériaux ductiles, plastification importante)
- **Aciers à basse et moyenne σ_E**
- **Aciers austénitiques**

- MDR
(Matériaux sollicités à grande vitesse de déformation)

- MVER
(Matériaux polymères)

- MVPR
(Métaux et céramiques à haute température)

M N L R

• Objectifs et conséquences de la Mécanique de la rupture

- la détermination du champ des contraintes et des déformations au voisinage d'une entaille ou d'une fissure ;

- la détermination de la capacité de résistance d'un matériau à la croissance d'un défaut, au moyen d'essais normalisés valides au plan international ;

- la mise au point de nouvelles méthodes de calcul des structures, et de procédures de contrôle et de maintenance fiables et plus économiques permettant une exploitation optimale ;

- la prévention de la durée de vie des structures comportant des défauts de dimensions connues.

Les structures en service sont généralement soumises à des sollicitations cycliques d'origines mécanique et/ou thermique. Ces sollicitations, bien qu'inférieures à la limite d'élasticité des matériaux, peuvent conduire à la rupture : c'est le processus d'endommagement par fatigue.

Cet endommagement comporte deux étapes. Dans un premier temps, une microfissure s'amorce près d'une zone de concentration des contraintes ; cet amorçage est suivi d'une propagation de fissure à l'échelle microscopique, invisible à l'œil nu. Dans un second temps, la fissure se propage à l'échelle macroscopique jusqu'à rupture.

La durée de vie en fatigue est donc tout naturellement décomposée en période d'amorçage et période de propagation. Pour des raisons pratiques, la propagation à l'échelle microscopique, c'est-à-dire la fissuration sur une longueur de quelques grains, est incluse dans la période d'amorçage.

Les études microscopiques du début du 20e siècle[1] ont montré que l'amorçage dans les matériaux métalliques commence par l'initiation de microfissures dans des zones où la déformation est localisée. Ces zones, appelées bandes de glissement, apparaissent en surface des éprouvettes testées après formation d'intrusions et d'extrusions selon le mécanisme schématisé sur la figure 1. Elles laissent à la surface des échantillons, des traces appelées lignes de glissement que l'on peut observer sur la figure 2a, obtenue après une légère attaque avec un réactif chimique. Cette figure montre également les joints de grains.

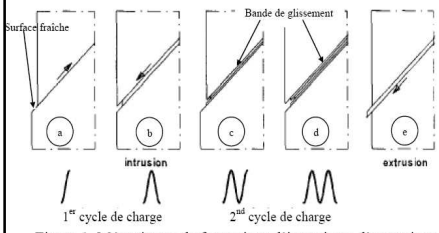


Figure 1. Mécanismes de formations d'intrusions, d'extrusions et de bandes de glissement

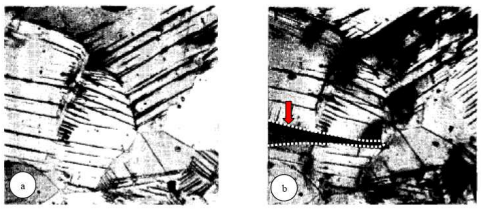


Figure 2. Lignes de glissement et formation d'une microfissure (flèche rouge) dans un échantillon de cuivre[2]

[1] J.A. Ewing and J.C.W Humfrey, *The fracture of metals under repeated alternations of stress*, Phil. Trans. Roy. Soc., A200, pp. 241-250, 1903

[2] W.P. Bullen, A.K. Head and W.A. Wood, Structural changes during the fatigue of metals, Proc. Roy. Soc., A216, p. 332, 1953

Un exemple des différentes phases du processus d'endommagement par fatigue est indiqué sur la figure 3.

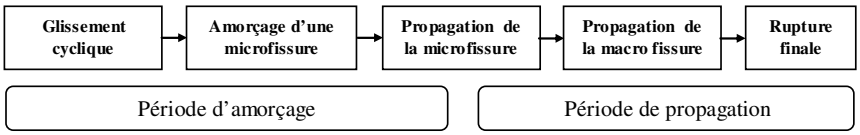


Figure 3. Différentes étapes de l'endommagement par fatigue.

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 2 – Elasticité plane en variables complexes

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

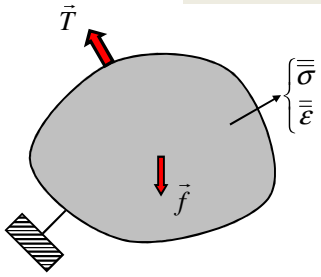
29

SOMMAIRE

- **Rappels d'élasticité plane**
- **Fonction d'Airy en variables complexes**
- **Représentation des déplacements et des contraintes**
- **Expression du torseur des efforts**

A. Zeghloul CFMR Elasticité plane en variables complexes 30

Rappels d'élasticité



- Equations de comportement
- Equations d'équilibre
- Equations de compatibilité

⇓

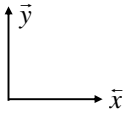
Solutions vérifiant les CL

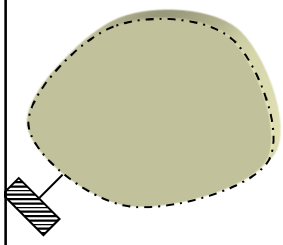
Equations de comportement (loi de Hooke)

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\upsilon}{E}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\upsilon}{E}(trace\overline{\overline{\sigma}})\overline{\overline{I}} \qquad \overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda(trace\overline{\overline{\varepsilon}})\overline{\overline{I}}$$

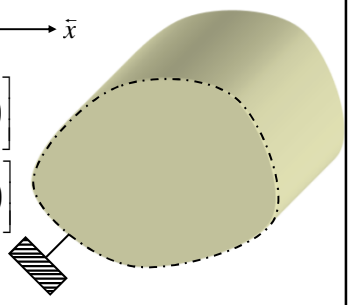
$$\begin{cases} \mu = \dfrac{E}{2(1+v)} \\ \lambda = \dfrac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ E = \mu\,\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \end{cases} \Rightarrow \frac{v}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

Etats plans





$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_x - \dfrac{\lambda^*}{2(\lambda^*+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y)\right] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{2\mu}\left[\sigma_y - \dfrac{\lambda^*}{2(\lambda^*+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y)\right] \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2\mu}\sigma_{xy} \end{cases}$$



$$\overline{\overline{\sigma}} : \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda^* = \lambda$	en déformations planes
$\lambda^* = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$	en contraintes planes

$$\Downarrow \qquad \overline{\overline{\varepsilon}} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad \overline{\overline{\sigma}} : \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode d'Airy

- **Equations d'équilibre**

$$\overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \qquad \vec{f}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = -\overrightarrow{grad}\,V \text{ où } V = V(x,y) \qquad \begin{pmatrix} X = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ Y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + X = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x - V)_{,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \\ \sigma_{xy,x} + (\sigma_y - V)_{,y} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} \sigma_x - V = A_{,yy} \\ \sigma_y - V = A_{,xx} \\ \sigma_{xy} = -A_{,xy} \end{cases}} \quad \boxed{\begin{matrix} A \\ \text{fonction d'Airy} \end{matrix}}$$

- **Equations de compatibilité**

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 \xrightarrow{\text{ETATS PLANS}} \begin{cases} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy} \\ \varepsilon_{z,xx} = \varepsilon_{z,yy} = \varepsilon_{z,xy} = 0 \end{cases}$$

$$(ijkl) = (1212),(1213) + \mathbf{PC}$$

$$\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right].yy + \left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right].xx = 2\sigma_{xy,xy}$$

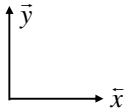
$$(1-\nu)\Delta(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_{x,xx} - \sigma_{y,yy} = 2\sigma_{xy,xy} \quad avec \quad \Delta.=.,_{xx}+.,_{yy}$$

$$(1-\nu)\Delta(\Delta A + 2V) - (A_{,yy} + V)_{,xx} - (A_{,xx} + V)_{,yy} = -2A_{,xxyy}$$

$$\Delta(\Delta A) + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V = 0$$

$$\boxed{\Delta(\Delta A) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta V = 0}$$

**** Forces de volume = forces de la pesanteur***



$$\vec{f} = \rho\vec{g} = -\rho\, g\,\vec{y} \qquad V(x,y) = V(y) = \rho\, gy + V_0$$

$$\Delta(\Delta A) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta V = 0 \qquad \boxed{\Delta(\Delta A) = 0}$$

Solution d'un problème d'élasticité plane

Fonction biharmonique A

**** Forces de volume négligées***

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= A_{,yy} \\ \sigma_y &= A_{,xx} \\ \sigma_{xy} &= -A_{,xy} \end{aligned}} \qquad \boxed{\textbf{avec} \quad \Delta(\Delta A) = 0}$$

Coordonnées polaires

Certains problèmes d'élasticité plane sont plus facilement traités en coordonnées polaires.

$$A(x, y) \rightarrow A(r, \theta)$$

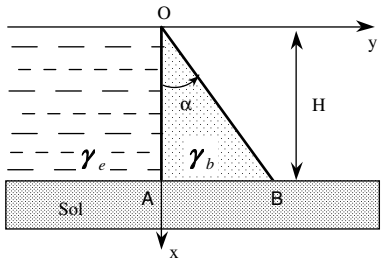
$$\Delta(\Delta A) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \qquad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

TD1 : Etude d'un barrage poids



**** Calculer le champ de contraintes en fonction de*** γ_e, γ_b ***et*** α

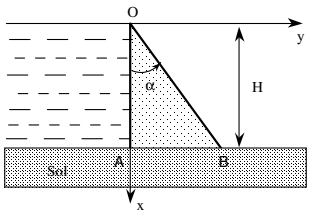
*** *Pour quelles valeurs de*** α **le barrage ne se soulève pas en supposant :**

a- pas d 'infiltration sous le barrage

b- infiltration sous le barrage

1- Les forces de volume dans le barrage en béton s'écrivent :

$$\vec{f} = \gamma_b \vec{x} \quad (\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow V = -\gamma_b x)$$



Le barrage est soumis à la poussée $\vec{P}$ de l'eau qui varie linéairement avec la profondeur x ($\vec{P} = \gamma_e x \vec{y}$) ; cette pression s'exerce sur la paroi OA du barrage.
La fonction d'Airy $A(x, y)$ qui convient est donc un polynôme d'ordre 3 :

$$A(x, y) = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3 \qquad (\Delta(\Delta A) = 0 \text{ vérifiée})$$

Les composantes du tenseur des contraintes sont alors données par :

$$\sigma_{xx} - V = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \Rightarrow \sigma_{xx} = -\gamma_b x + 2cx + 6dy$$

$$\sigma_{yy} - V = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_{yy} = -\gamma_b x + 6ax + 2by$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial xy} \Rightarrow \sigma_{xy} = -2bx - 2cy$$

2- Les conditions limites s'écrivent :

Sur la paroi OA, la CL est $\bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\vec{y}) = \vec{P} = \gamma_e x \vec{y}$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0 \qquad \sigma_{yy}(x, 0) = -\gamma_e x$$

$$2b = 0 \text{ et } 6a = \gamma_b - \gamma_e$$

Sur la paroi OB, on a $y = x \tan\alpha$

CL est $\bar{\bar{\sigma}} \cdot (\vec{n}_{ext}) = \vec{0}$ avec $\vec{n}_{ext} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

$$\begin{cases} -\sigma_{xx} \sin\alpha + \sigma_{xy} \cos\alpha = 0 \\ -\sigma_{xy} \sin\alpha + \sigma_{yy} \cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow 2c = \frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} \text{ et } 6d = \frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} - \gamma_b$$

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} - \gamma_b\right) x + \left(\frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} - \gamma_b\right) y \qquad \sigma_{yy} = -\gamma_e x \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} y$$

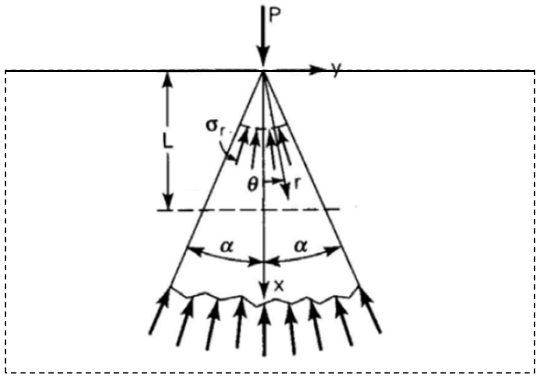
a- Pas d'infiltration $\Rightarrow \sigma_{xx}(A) \le 0$

$$\left(\frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} - \gamma_b\right) H \le 0 \Rightarrow \tan^2\alpha \ge \frac{\gamma_e}{\gamma_b} \qquad \text{AN : } \alpha \ge 35,26°$$

b- infiltration $\Rightarrow \sigma_{xx}(A) \le -\gamma_e H$

$$\left(\frac{\gamma_e}{\tan^2\alpha} - \gamma_b\right) H \le -\gamma_e H \Rightarrow \tan^2\alpha \ge \frac{\gamma_e}{\gamma_b - \gamma_e} \qquad \text{AN : } \alpha \ge 45°$$

TD1 suite : Semi plan infini sous charge ponctuelle



Fonction d'Airy associée à ce chargement

$$A(r, \theta) = cPr\theta \sin\theta$$

Montrer que $A(r;\theta)$ est biharmonique.
Calculer les contraintes.
Déterminer la constante c en fonction de l'angle α.
Donner les contraintes lorsque $\alpha = \pi/2$

$$A(r,\theta) = cPr\theta\sin\theta$$

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = 0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{cP\theta\sin\theta}{r} \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = \frac{cP}{r}\left(2\cos\theta - \theta\sin\theta\right) \qquad \Rightarrow \Delta A = \frac{2cP}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 \Delta A}{\partial r^2} = \frac{4cP}{r^3}\cos\theta \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta A}{\partial r} = -\frac{2cP\theta}{r^3}\cos\theta \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Delta A}{\partial \theta^2} = -\frac{2cP}{r^3}\cos\theta \qquad \Rightarrow \Delta(\Delta A) = 0$$

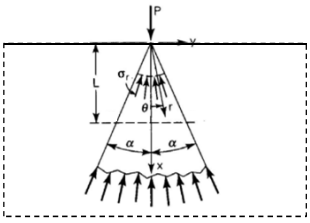
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = \frac{2cP}{r}\cos\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) = 0$$

<u>Conditions aux limites</u>

$$\sigma_r = \frac{2cP}{r}\cos\theta$$



$$P = -\int \cos\theta dF = -2\int_0^\alpha \sigma_r \cos\theta r d\theta = -4cP\int_0^\alpha \cos^2\theta d\theta$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2\alpha + \sin 2\alpha}$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{\pi}$$

$$\sigma_r = \frac{2cP}{r}\cos\theta = -\frac{2p}{\pi r}\cos\theta \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$