Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 2 – Elasticité plane en variables complexes

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

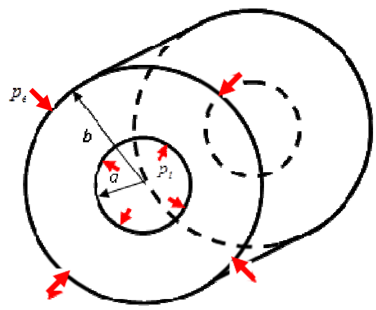
1

TD4 : Etude de structures trouées chargées en états plans

1- Un cylindre long de rayon intérieur a et extérieur b est soumis à une pression intérieure p_i et extérieure p_e. Les potentiels complexes associés à ce problème d'élasticité plane sont :

$$\varphi(z) = Az \qquad \chi(z) = B\ln z \quad (A \text{ et } B \text{ constantes réelles})$$

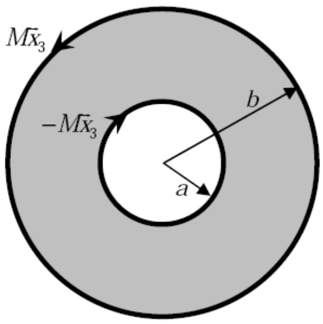
- Déterminer les champ des contraintes et les constantes A et B, en fonction des données géométriques (rayons a et b) et du chargement (pressions p_i et p_e.).
- Exprimer le déplacement par intégration des déformations et par utilisation des potentiels complexes.



2- Un anneau mince de rayon intérieur a et extérieur b est soumis à des couples M (par unité d'épaisseur) égaux et opposés, résultant de contraintes de cisaillement sur ses parois. Les potentiels complexes associés à ce problème d'élasticité plane sont :

$\varphi(z) = 0$ $\chi(z) = Bi\ln z$ $(B$ constante réelle$)$

- Déterminer les champ des contraintes et la constante B, en fonction du couple de cisaillement M.
- Exprimer le champ des déplacements.



Corrigé du TD4

1- Cylindre creux sous pression interne et externe :

Calcul des contraintes $\varphi(z) = Az$ $\chi(z) = B\ln z$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4A \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = -2\dfrac{B}{r^2} \end{cases}$$

soit

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} \qquad \sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} \qquad \tau_{r\theta} = 0$$

C.L. Pressions p_i et p_e sur les parois interne et externe :

$$\sigma_{rr}(a) = 2A + \frac{B}{a^2} = -p_i \quad \text{et} \quad \sigma_{rr}(b) = 2A + \frac{B}{b^2} = -p_e$$

Soit

$$2A = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(p_e - p_i)$$

Calcul du champ des déplacements par intégration de $\varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}$ (u_θ nul compte tenu du chargement) et en déformations planes (cylindre épais) :

$$2\mu\varepsilon_{rr} = (1-\upsilon)\sigma_{rr} - \upsilon\sigma_{\theta\theta} = \left((1-2\upsilon)2A + \frac{B}{r^2}\right) \Rightarrow 2\mu u_r = \left((1-2\upsilon)2Ar - \frac{B}{r}\right)$$

Calcul du champ des déplacements par les potentiels complexes :

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}((3-4\upsilon)\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\chi}') = (3-4\upsilon)Ar - Ar - \frac{B}{r}$$

soit

$$2\mu u_r = \left((1-2\upsilon)2Ar - \frac{B}{r}\right) \quad \text{et} \quad u_\theta = 0$$

2- Anneau mince en cisaillement : $\varphi(z) = 0$ $\chi(z) = Bi\ln z$

Pour le calcul des contraintes on utilise les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\overline{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r + \sigma_\theta = 0 \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = -2\dfrac{Bi}{r^2} \end{cases}$$

Soit $\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \qquad \tau_{r\theta} = -\dfrac{B}{r^2}$

C.L. Moment de cisaillement $-M\vec{x}_3$ sur la paroi interne de rayon a (paroi a) :

$$\oint_{paroi\ a} (a\vec{e}_r \wedge \tau_{r\theta}\vec{e}_\theta)\,ad\theta = -M\vec{x}_3 \quad \text{soit} \quad B = \frac{M}{2\pi}$$

Pour le calcul du déplacement, on utilise : $2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}(\kappa\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\chi}')$

$\kappa = \dfrac{3-\upsilon}{1+\upsilon}$ en CP

Soit $u_r = 0$ et $u_\theta = \dfrac{B}{2\mu r} = \dfrac{M}{4\pi\mu r}$

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 3 – Concentration des contraintes près des entailles

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

SOMMAIRE

Introduction

Dans les structures, des entailles géométriques dues à des changements brusques de section (épaulements, gorge, cannelure, orifice de lubrification …) sont souvent inévitables compte tenu de leur rôle fonctionnel. Au voisinage de ces incidents de forme, les répartitions des contraintes sont inhomogènes et conduisent à des concentrations de contraintes : la figure 1 illustre ces concentrations où l'on observe que la contrainte atteinte à la racine du trou est bien plus élevée que la contrainte nominale σ_{nom} de traction appliquée à la plaque.

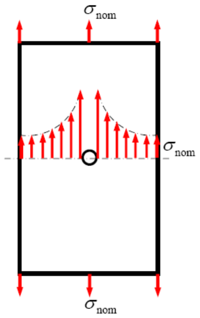


Figure 1. Répartition des contraintes autour d'un trou dans une plaque

Le facteur de concentration des contraintes est le rapport de la contrainte maximale (σ_{max}) observée à la racine de l'incident de forme sur la contrainte nominale (σ_{nom}) à laquelle la structure est soumise. Ce facteur, noté K_t, est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

La sévérité de la concentration de contraintes dépend de la géométrie et de la configuration de l'entaille. Lorsqu'on conçoit une structure, on cherche à réduire autant que possible les concentrations de contraintes pour éviter notamment les problèmes de rupture par fatigue. Ce chapitre traite des différents aspects des concentrations des contraintes et des effets de la géométrie sur le facteur K_t : c'est l'une des questions fondamentales pour le dimensionnement en fatigue des structures. Le chapitre commence par la détermination théorique de ce facteur en s'appuyant sur les résultats du chapitre précédent.

Détermination du facteur de concentration des contraintes

Considèrons une plaque avec un trou elliptique central, très petit par rapport aux dimensions de la plaque (figure 2a).

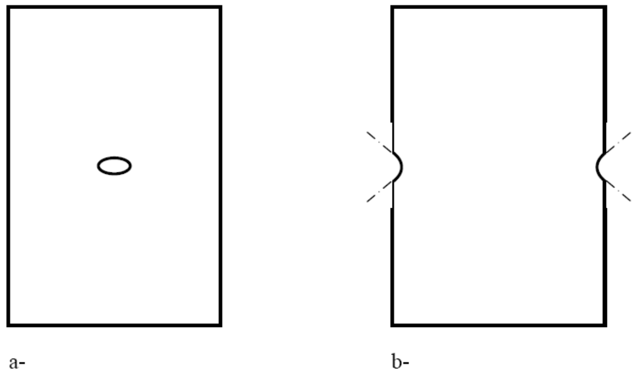


Figure 2. Entaille elliptique (a) et entaille hyperbolique (b)

Pour traiter le problème de concentration de contraintes au voisinage de ce genre de contour curviligne, on adopte le changement de variable suivant :

$$x = x(\alpha, \beta) = c \cosh \alpha \cos \beta$$
$$y = y(\alpha, \beta) = c \sinh \alpha \sin \beta$$

qui présente l'avantage de décrire à la fois les contours elliptiques et les contours de forme hyperbolique (figure 2b) selon que l'on maintient constante la variable α ou β.

- pour $\alpha = \alpha_0$

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \alpha_0 \cos \beta = a \cos \beta \\ y &= c \sinh \alpha_0 \sin \beta = b \sin \beta \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (équation d'une ellipse)}$$

où

$$a = c \cosh \alpha_0 \ ; \ b = c \sinh \alpha_0 \ \text{et} \ c = \sqrt{a^2 - b^2} \ ;$$

les foyers de l'ellipse sont situés à $x = \pm c$.

$$x = x(\alpha,\beta) = c\cosh\alpha\cos\beta$$
$$y = y(\alpha,\beta) = c\sinh\alpha\sin\beta$$

- pour $\beta = \beta_0$

$$\begin{aligned} x &= c\cosh\alpha\cos\beta_0 = a'\cosh\alpha \\ y &= c\sinh\alpha\sin\beta_0 = b'\sinh\alpha \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 \text{ (équation d'une hyperbole)}$$

où

$$a' = c\cos\beta_0 \ ; \ b' = c\sin\beta_0 \text{ et } c = \sqrt{a'^2 + b'^2} \ ;$$

les foyers de l'hyperbole sont aussi situés à $x = \pm c$.

On a ainsi un faisceau d'ellipses et d'hyperboles homofocales pour différentes valeurs fixées de α et β (figure 3).

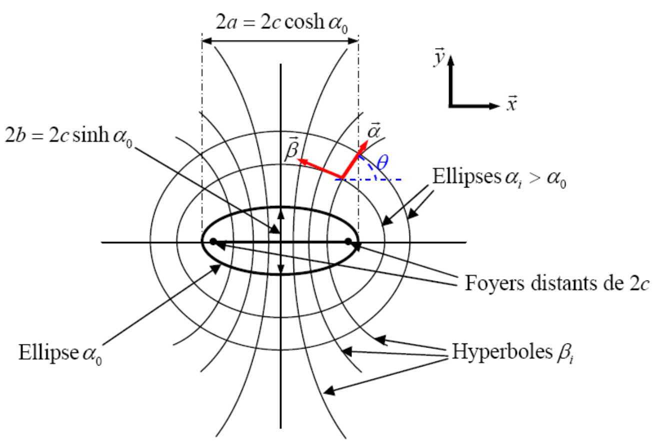


Figure 3. Faisceau d'ellipses et d'hyperboles homofocales

A partir des relations $x = x(\alpha,\beta) = c\cosh\alpha\cos\beta$, $y = y(\alpha,\beta) = c\sinh\alpha\sin\beta$ on définit le complexe :

$$z = x + iy = c\left(\cosh\alpha\cos\beta + i\sinh\alpha\sin\beta\right) = c\cosh(\alpha + i\beta)$$

soit

$$z = c\cosh\zeta = f(\zeta)\ ;\quad \bar{z} = c\cosh\bar{\zeta} = \bar{f}(\bar{\zeta})$$

et

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) = c\sinh\zeta\ ;\qquad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{c\sinh\zeta}$$

La relation $\dfrac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} = e^{2i\theta}$ permet d'écrire :

$$e^{2i\theta} = \frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} = \frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar{\zeta}}$$

où θ est l'angle $\widehat{(\vec{x},\vec{\alpha})}$

Plaque percée d'un trou elliptique uniformément chargée

La figure 4 représente une plaque uniformément chargée, autrement dit, la contrainte σ^{∞} appliquée à la plaque est perpendiculaire en tout point à ses extrémités. Cette plaque est percée d'un très petit trou elliptique. On utilise les résultats du chapitre précédent pour déterminer les potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ associés à cette configuration de chargement.

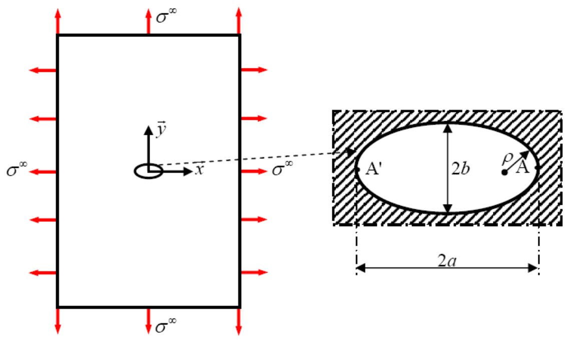
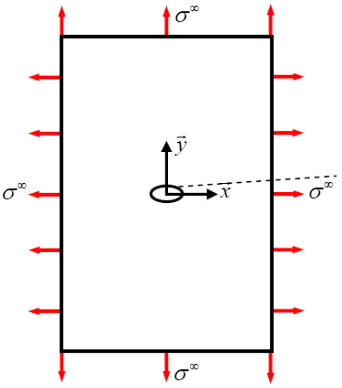


Figure 4. Plaque uniformément chargée, percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ

• Les conditions limites aux bords de la plaque, c'est-à-dire à l'infini compte tenu de la taille importante de la plaque comparée à celle du trou elliptique, sont données par :

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty \qquad \text{et} \qquad \sigma_{xy}^\infty = 0$$



$$\boxed{\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]}$$

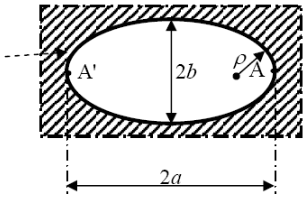
$$\boxed{\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]}$$

et

$$\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty = 2\sigma^\infty = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_\infty$$

$$\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\sigma_{xy}^\infty = 0 = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_\infty$$

On a donc pour $|z|$ grand : $\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_\infty = \sigma^\infty \\ \left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_\infty = 0 \end{cases}$



• Les conditions limites aux extrémités du trou elliptique, c'est-à-dire pour $\alpha = \alpha_0$, sont données par :

$$\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0} = \sigma_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0} = 0 \quad \text{quelque soit } \beta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} &= 2\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right] \\ \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} &= 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right] \end{aligned}}$$

$$\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0} = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_{\alpha=\alpha_0} = 2\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right)_{\alpha=\alpha_0}$$

$$\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_0} = 2e^{2i\theta}\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_{\alpha=\alpha_0}$$

d'où

$$\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right)_{\alpha=\alpha_0} - e^{2i\theta}\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

Il s'agit maintenant de trouver les fonctions $\varphi(z)$ *et* $\chi(z)$ satisfaisant les conditions limites

Comme, par raison de continuité, les composantes des contraintes doivent être périodiques et de période 2π par rapport à β, les solutions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ doivent avoir des formes qui engendrent cette périodicité. De telles formes sont :

$$\sinh n\zeta = \sinh n\alpha \cos n\beta + i \cosh n\alpha \sin n\beta$$
$$\cosh n\zeta = \cosh n\alpha \cos n\beta + i \sinh n\alpha \sin n\beta$$

De plus, les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ n'intervenant que par leur dérivées, on peut adjoindre aux formes précédentes la fonction $A\zeta$ où A est une constante réelle ou complexe. Par ailleurs, les contraintes devant rester finies loin de l'entaille (c'est-à-dire à l'infini), l'entier n doit rester inférieur à un ($n \le 1$) pour $\varphi(z)$ et inférieur à deux ($n \le 2$) pour $\chi(z)$. Les solutions ont donc la forme générale suivante :

$$\begin{cases} z = c\cosh\zeta \\ \varphi(z) = A_0\zeta + A_1\sinh\zeta + A_2\cosh\zeta \\ \chi(z) = B_0\zeta + B_1\sinh\zeta + B_2\cosh\zeta + B_3\sinh 2\zeta + B_4\cosh 2\zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = c\cosh\zeta \\ \varphi(z) = A_0\zeta + A_1\sinh\zeta + A_2\cosh\zeta \\ \chi(z) = B_0\zeta + B_1\sinh\zeta + B_2\cosh\zeta + B_3\sinh 2\zeta + B_4\cosh 2\zeta \end{cases}$$

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]$$
$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = 2e^{2i\theta}\left[\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]$$

Dans le cas de la plaque chargée uniformément et percée d'une petite entaille elliptique, les solutions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ ont été proposées par KOLOSOFF en 1913. Seuls les termes A_1 et B_0 sont non nuls, et cet auteur présente les solutions sous la forme :

$$\varphi(z) = Ac\sinh\zeta \qquad (A_1 = Ac)\ \text{réel}$$
$$\chi(z) = Bc^2\zeta \qquad (B_0 = Bc^2)\ \text{réel}$$

$$\varphi'(z) = \frac{Ac\cosh\zeta}{c\sinh\zeta} = A\frac{\cosh\zeta}{\sinh\zeta}\ ;\ \varphi''(z) = -\frac{A}{c\sinh^3\zeta}\ ;\ \overline{z}\varphi''(z) = -\frac{A\cosh\overline{\zeta}}{\sinh^3\zeta}$$
$$\chi'(z) = \frac{Bc}{\sinh\zeta}\ ;\ \chi''(z) = -\frac{B\cosh\zeta}{\sinh^3\zeta}$$

- Comme $\coth\zeta\big)_{\alpha\to\infty} = 1$, $\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]^\infty = A$ et $\left(\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)^\infty = 0$ $\boxed{\Rightarrow A = \dfrac{\sigma^\infty}{2}}$

$$\boxed{\varphi'(z) = \frac{Ac\cosh\zeta}{c\sinh\zeta} = A\frac{\cosh\zeta}{\sinh\zeta}\ ;\ \varphi''(z) = -\frac{A}{c\sinh^3\zeta}\ ;\ \bar{z}\varphi''(z) = -\frac{A\cosh\bar{\zeta}}{\sinh^3\zeta} \quad \chi'(z) = \frac{Bc}{\sinh\zeta}\ ;\ \chi''(z) = -\frac{B\cosh\zeta}{\sinh^3\zeta}}$$

$$\boxed{e^{2i\theta} = \frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} = \frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar{\zeta}}}$$

- Au bord du trou elliptique, on a $\alpha = \alpha_0$, d'où $\zeta = \alpha_0 + i\beta$, $\zeta + \bar{\zeta} = 2\alpha_0$

La condition limite $\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right)_{\alpha=\alpha_0} - e^{2i\theta}\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_{\alpha=\alpha_0} = 0$ devient :

$$A\left(\frac{\cosh\zeta}{\sinh\zeta} + \frac{\cosh\bar{\zeta}}{\sinh\bar{\zeta}}\right) + \frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar{\zeta}}\left(A\frac{\cosh\bar{\zeta}}{\sinh^3\zeta} + B\frac{\cosh\zeta}{\sinh^3\zeta}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{\overbrace{\cosh\zeta\sinh\bar{\zeta} + \sinh\zeta\cosh\bar{\zeta}}^{\sinh(\zeta+\bar{\zeta})}}{\sinh\zeta\sinh\bar{\zeta}}\right) + \frac{1}{\sinh\bar{\zeta}\sinh^2\zeta}\left(A\cosh\bar{\zeta} + B\cosh\zeta\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sinh^2\zeta\sinh\bar{\zeta}}\left\{A\left[\sinh\zeta\cdot\sinh\left(\underbrace{\zeta+\bar{\zeta}}_{2\alpha_0}\right) + \cosh\underbrace{\bar{\zeta}}_{2\alpha_0-\zeta}\right] + B\cosh\zeta\right\} = 0$$

soit

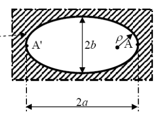
$$A\left[\cancel{\sinh\zeta\sinh 2\alpha_0} + \cosh 2\alpha_0\cosh\zeta - \cancel{\sinh 2\alpha_0\sinh\zeta}\right] + B\cosh\zeta = 0$$

D'où finalement $\left(A\cosh 2\alpha_0 + B\right)\cosh\zeta = 0$ et donc : $B = -A\cosh 2\alpha_0 = -\dfrac{\sigma^\infty}{2}\cosh 2\alpha_0$

$$\boxed{\varphi(z) = Ac\sinh\zeta \quad \chi(z) = Bc^2\zeta}$$

Les potentiels complexes ont alors pour expressions :

$$\varphi(z) = \frac{\sigma^\infty c}{2}\sinh\zeta \qquad \text{et} \qquad \chi(z) = -\frac{\sigma^\infty c^2\cosh 2\alpha_0}{2}\zeta$$



La contrainte maximale $\sigma_\beta^{\max}$ est atteinte à l'extrémité A (ou A') de l'entaille c'est-à-dire pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = 0$ en A, soit $\zeta = \alpha_0$. Comme la contrainte $\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$ est nulle, la valeur de $\sigma_\beta^{\max}$ peut être calculée directement :

$$\sigma_\beta^{\max} = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_{\zeta=\alpha_0} = 2\sigma^\infty\frac{\cosh\alpha_0}{\sinh\alpha_0} = 2\sigma^\infty\frac{a}{b}$$

$$\boxed{a = c\cosh\alpha_0} \quad \boxed{b = c\sinh\alpha_0}$$

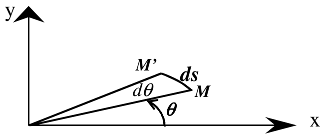
Le facteur de concentration des contraintes K_t est quant à lui donné par : $\boxed{K_t = \dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} = 2\dfrac{a}{b}}$

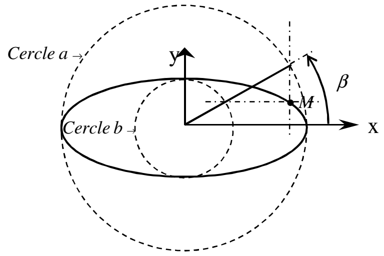
Le rayon ρ à fond d'une entaille elliptique de grand axe a et de petit axe b s'exprimant par $\rho = b^2/a$, le facteur K_t peut aussi s'écrire : $\boxed{K_t = 2\sqrt{\dfrac{a}{\rho}}}$

Calcul du rayon à fond d'entaille d'une ellipse $\rho = \frac{b^2}{a}$

$$\begin{cases} x = x(\beta) = a\cos\beta \\ y = y(\beta) = b\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \quad ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2} d\beta$$

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} \quad \text{avec} \quad ds = \overline{MM'} = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$





$$tg\,\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} d\beta \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'}$$

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)^{3/2}}{ab}$$

$$x = a \, , \, \beta = 0 \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a}$$

Plaque percée d'un trou elliptique sollicitée en traction simple

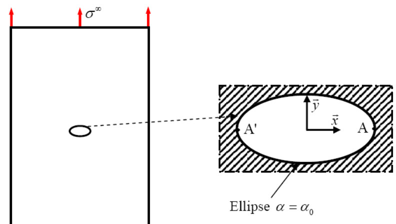


Figure 5. Plaque chargée en traction simple, percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ

- Les conditions limites aux bords de la plaque (figure 5), sont données par :

$$\sigma_y^\infty = \sigma^\infty \qquad \text{et} \qquad \sigma_x^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$$

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2\left(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]$$

$$\sigma_y^\infty = \sigma^\infty = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_\infty$$

et

$$\sigma_y^\infty = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right)_\infty = \sigma^\infty$$

Les solutions pour cette configuration de chargement ont été données par Stevenson en 1945.

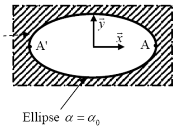
$$\begin{cases} z = c\cosh\zeta \\ \varphi(z) = A_0\zeta + A_1\sinh\zeta + A_2\cosh\zeta \\ \chi(z) = B_0\zeta + B_1\sinh\zeta + B_2\cosh\zeta + B_3\sinh 2\zeta + B_4\cosh 2\zeta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(z) &= Ac\cosh\zeta + Bc\sinh\zeta \\ \chi(z) &= Dc^2\zeta + Ec^2\cosh 2\zeta + Fc^2\sinh 2\zeta \end{aligned}}$$

Avec

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{4}e^{2\alpha_0}, \quad B = \frac{\sigma^\infty}{4}\left(1+e^{2\alpha_0}\right), \quad D = -\frac{\sigma^\infty}{4}\left(1+\cosh 2\alpha_0\right),$$

$$E = \frac{\sigma^\infty}{8}e^{2\alpha_0}\cosh 2\alpha_0 \quad \text{et} \quad F = -\frac{\sigma^\infty}{8}e^{2\alpha_0}\sinh 2\alpha_0$$



La contrainte maximale $\sigma_\beta^{\max}$, atteinte à l'extrémité A de l'entaille (figure 5) pour $\zeta = \alpha_0$, est calculée comme dans le cas précédent :

$$\sigma_\beta^{\max} = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]_{\zeta=\alpha_0} = 4\left(A + B\frac{\cosh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right) \qquad \sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty\left(-e^{2\alpha_0} + \left(1+e^{2\alpha_0}\right)\frac{\cosh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right)$$

$$\sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty\left(e^{2\alpha_0}\left(\frac{\cosh\alpha_0 - \sinh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right) + \frac{\cosh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right) \qquad \sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty\left(\frac{e^{\alpha_0}}{\sinh\alpha_0} + \frac{\cosh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right) = \sigma^\infty\left(\frac{2\cosh\alpha_0 + \sinh\alpha_0}{\sinh\alpha_0}\right)$$

$$\sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty\left(1 + 2\frac{a}{b}\right) \qquad \boxed{K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}}$$

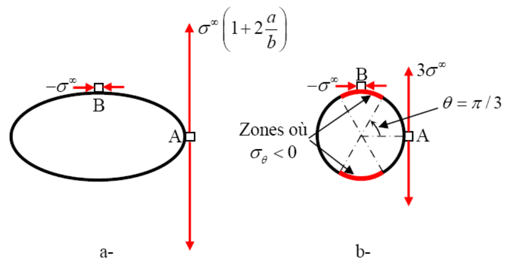


Figure 6. Plaque sollicitée en traction : contraintes aux extrémités A et B
a- d'un trou elliptique et b- d'un trou circulaire

La contrainte au point A est maximale $\sigma_\beta(A) = \sigma^\infty\left(1 + 2a/b\right)$; au point B (figure 6a), on a $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \pi/2$ d'où $\zeta_B = \alpha_0 + i\pi/2$:

$$\sigma_\beta(B) = 4\,\mathrm{Re}\left[A + B\frac{\cosh\zeta_B}{\sinh\zeta_B}\right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cosh\zeta_B = \cosh\left(\alpha_0 + i\pi/2\right) = i\sinh\alpha_0 \\ \sinh\zeta_B = \sinh\left(\alpha_0 + i\pi/2\right) = i\cosh\alpha_0 \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_\beta(B)}{\sigma^\infty} = -e^{2\alpha_0} + \left(1+e^{2\alpha_0}\right)\frac{\sinh\alpha_0}{\cosh\alpha_0} = e^{2\alpha_0}\left(\frac{\sinh\alpha_0 - \cosh\alpha_0}{\cosh\alpha_0}\right) + \frac{\sinh\alpha_0}{\cosh\alpha_0}$$

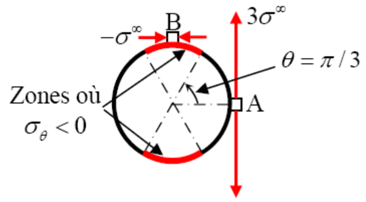
$$\frac{\sigma_\beta(B)}{\sigma^\infty} = \left(\frac{-e^{\alpha_0} + \sinh\alpha_0}{\cosh\alpha_0}\right) = -\frac{\cosh\alpha_0}{\cosh\alpha_0} = -1$$

La contrainte, le long du trou circulaire, est en fait donnée par :

$$\sigma_\theta = \sigma^\infty(1+2\cos 2\theta) \qquad (\beta=\theta \text{ pour un trou circulaire})$$

Cette relation montre que la contrainte σ_θ, qui vaut $3\sigma^\infty$ pour $\theta=0$, s'annule pour $\theta=\pi/3$.

Par raison de symétrie, la contrainte σ_θ est négative dans les zones où $\pi/3<\theta<2\pi/3$ et $-2\pi/3<\theta<-\pi/3$ (figure 6b).



On peut montrer (cf. TD) que la contrainte σ_θ en n'importe quel point de la plaque percée d'un trou circulaire, et sollicitée en traction, est donnée par :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

Gradient de contrainte le long de l'axe d'une entaille

Cas du trou circulaire

La formule établie précédemment $\sigma_\theta = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$ montre que la variation de la contrainte σ_θ le long de l'axe du trou circulaire, c'est-à-dire pour $\theta=0$ (soit $y=0$, $r=x$ et $\sigma_\theta=\sigma_y$), est donnée par :

$$\frac{\sigma_y\big)_{y=0}}{\sigma^\infty} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^4$$

Lorsque x est grand, $\sigma_y\big)_{y=0}=\sigma^\infty$ et pour $x=a$, $\sigma_y\big)_{y=0}=3\sigma^\infty=\sigma^{\max}$.

Cas du trou elliptique

Le long de l'axe du trou elliptique, $z=x$ et donc $\beta=0$. On a alors :

$$x = c\cosh\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cosh^{-1}\frac{x}{c} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

Dans ces conditions les potentiels complexes φ et χ s'écrivent, avec $\alpha=\zeta$:

$$\varphi(x) = Ac\cosh\alpha + Bc\sinh\alpha = Ax + B\sqrt{x^2-c^2}$$

$$\chi(x) = Dc^2\alpha + Ec^2\cosh 2\alpha + Fc^2\sinh 2\alpha$$

$$\chi(x) = Dc^2\cosh^{-1}\frac{x}{c} + E(2x^2-c^2) + 2Fx\sqrt{x^2-c^2}$$

$$\varphi(x) = Ax + B\sqrt{x^2-c^2} \qquad \chi(x) = Dc^2\cosh^{-1}\frac{x}{c} + E(2x^2-c^2) + 2Fx\sqrt{x^2-c^2}$$

$$\varphi'(x) = A + \frac{Bx}{\sqrt{x^2-c^2}} \quad ; \quad \varphi''(x) = -\frac{Bc^2}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\chi'(x) = \frac{Dc^2}{\sqrt{x^2-c^2}} + 4Ex + 2F\sqrt{x^2-c^2} + \frac{2Fx^2}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\chi''(x) = -\frac{Dc^2x}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}} + 4E + \frac{6Fx}{\sqrt{x^2-c^2}} - \frac{2Fx^3}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}}$$

La contrainte σ_y le long de l'axe x est donnée par :

$$\sigma_y\big)_{y=0} = \sigma_\beta\big)_{\beta=0} = 2\varphi'(x) + x\varphi''(x) + \chi''(x)$$

$$\left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2\varphi'(x) + x\varphi''(x) + \chi''(x)$$

$$\varphi'(x) = A + \frac{Bx}{\sqrt{x^2-c^2}} \quad ; \quad \varphi''(x) = -\frac{Bc^2}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\chi''(x) = -\frac{Dc^2x}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}} + 4E + \frac{6Fx}{\sqrt{x^2-c^2}} - \frac{2Fx^3}{(x^2-c^2)\sqrt{x^2-c^2}}$$

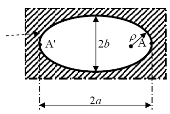
$$\left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2A + 4E + \frac{(2B+6F)x}{\sqrt{x^2-c^2}} - \frac{Bc^2x + Dc^2x + 2Fx^3}{\left(x^2-c^2\right)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2A + 4E + \frac{(2B+6F)x\left(x^2-c^2\right) - \left(Bc^2x + Dc^2x + 2Fx^3\right)}{\left(x^2-c^2\right)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\Rightarrow \left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2A + 4E + \frac{(2B+4F)x^3 - \left(3B+D+6F\right)c^2x}{\left(x^2-c^2\right)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{4}e^{2\alpha_0} \qquad B = \frac{\sigma^\infty}{4}\left(1+e^{2\alpha_0}\right) \qquad D = -\frac{\sigma^\infty}{4}\left(1+\cosh 2\alpha_0\right)$$

$$E = \frac{\sigma^\infty}{8}e^{2\alpha_0}\cosh 2\alpha_0 \qquad F = -\frac{\sigma^\infty}{8}e^{2\alpha_0}\sinh 2\alpha_0$$



$$a = c\cosh\alpha_0 \qquad b = c\sinh\alpha_0 \qquad c^2 = a^2 - b^2 \qquad \rho = \frac{b^2}{a}$$

$$\cosh 2\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{c^2} \qquad \sinh 2\alpha_0 = \frac{2ab}{c^2} \qquad e^{2\alpha_0} = \cosh 2\alpha_0 + \sinh 2\alpha_0 = \frac{\left(a+b\right)^2}{c^2}$$

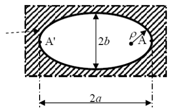
$$\left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2A + 4E + \frac{(2B+4F)x^3 - \left(3B+D+6F\right)c^2x}{\left(x^2-c^2\right)\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\frac{4A+8E}{\sigma^\infty} = e^{2\alpha_0}\left(\cosh 2\alpha_0 - 1\right) = \left(\cosh 2\alpha_0 + \sinh 2\alpha_0\right)2\sinh^2\alpha_0$$

$$= \frac{2b^2\left(a+b\right)^2}{c^4} = \frac{2b^2}{(a-b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2A+4E}{\sigma^\infty} = \frac{b^2}{(a-b)^2} = 1 + \frac{a(2b-a)}{(a-b)^2}$$

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{4} e^{2\alpha_0} \qquad B = \frac{\sigma^\infty}{4}\left(1 + e^{2\alpha_0}\right) \qquad D = -\frac{\sigma^\infty}{4}\left(1 + \cosh 2\alpha_0\right)$$



$$E = \frac{\sigma^\infty}{8} e^{2\alpha_0} \cosh 2\alpha_0 \qquad F = -\frac{\sigma^\infty}{8} e^{2\alpha_0} \sinh 2\alpha_0$$

$$a = c\cosh\alpha_0 \qquad b = c\sinh\alpha_0 \qquad c^2 = a^2 - b^2 \qquad \rho = \frac{b^2}{a}$$

$$\cosh 2\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{c^2} \qquad \sinh 2\alpha_0 = \frac{2ab}{c^2} \qquad e^{2\alpha_0} = \cosh 2\alpha_0 + \sinh 2\alpha_0 = \frac{(a+b)^2}{c^2}$$

$$\boxed{\left.\sigma_y\right)_{y=0} = 2A + 4E + \frac{(2B+4F)x^3 - \left(3B + D + 6F\right)c^2 x}{\left(x^2 - c^2\right)\sqrt{x^2 - c^2}}}$$

$$\frac{4B+8F}{\sigma^\infty} = 1 + e^{2\alpha_0}(1 - \sinh 2\alpha_0)$$

$$= 1 + \frac{(a+b)^2}{c^2}\left(1 - \frac{2ab}{c^2}\right) = 1 + \frac{a^2 - b^2 - 2ab}{(a-b)^2} \qquad \Rightarrow \frac{2B+4F}{\sigma^\infty} = \frac{a(a-2b)}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - b^2 - 2ab}{(a-b)^2} = \frac{2a(a-2b)}{(a-b)^2}$$

Finalement après calcul, la variation de la contrainte le long de l'axe de l'entaille elliptique se met sous la forme :

$$\frac{\left.\sigma_y\right)_{y=0}}{\sigma^\infty} = 1 + \frac{N(x)}{D(x)}$$

avec

$$N(x) = a(a-2b)\left(x - \sqrt{x^2 - c^2}\right)\left(x^2 - c^2\right) + ab^2(a-b)x$$

$$D(x) = (a-b)^2\left(x^2 - c^2\right)\sqrt{x^2 - c^2}$$

Lorsque x est grand, $\left.\sigma_y\right)_{y=0} = \sigma^\infty$

Pour $x = a$, $\dfrac{\left.\sigma_y\right)_{y=0}}{\sigma^\infty} = 1 + \dfrac{N(a)}{D(a)} = 1 + 2\dfrac{a}{b}$

Avec $\begin{cases} N(a) = a(a-2b)(a-b)b^2 + a^2b^2(a-b) = 2ab^2(a-b)^2 \\ D(a) = (a-b)^2 b^3 \end{cases}$