UNIVERSITÉ DE LORRAINE — enim École nationale d'ingénieurs de Metz — ARTS ET MÉTIERS ParisTech

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 2 – Elasticité plane en variables complexes

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

1

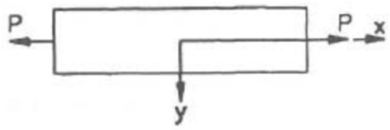
SOMMAIRE

- Rappels d'élasticité plane
- Fonction d'Airy en variables complexes
- Représentation des déplacements et des contraintes
- Expression du torseur des efforts

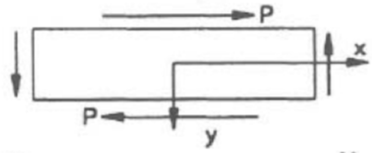
Fonctions d’Airy de quelques chargements (1)

$$\sigma_x = A_{,yy} \qquad \sigma_y = A_{,xx} \qquad \sigma_{xy} = -A_{,xy}$$

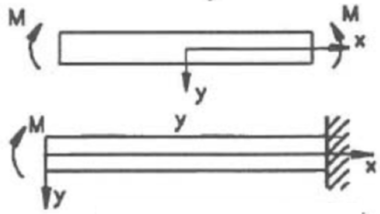
$A(x, y) = ay^2$ Poutre en traction



$A(x, y) = axy$ Poutre en cisaillement

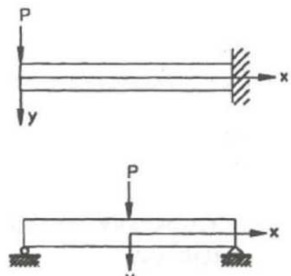


$A(x, y) = ay^3$ Poutre soumise à moment fléchissant

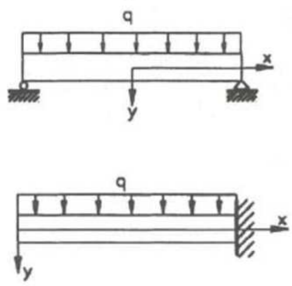


Fonctions d’Airy de quelques chargements (2)

$A(x, y) = axy + bxy^3$



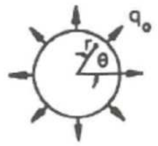
$A(x, y) = ax^2 + bx^2 y + cy^3 + dx^2 y^3 + ey^5$



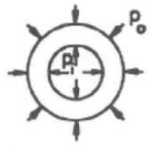
Fonctions d'Airy de quelques chargements (3)

Chargements axisymétriques $\boxed{\sigma_r = \frac{1}{r} A_{,r} \qquad \sigma_\theta = A_{,rr} \qquad \tau_{r\theta} = 0}$

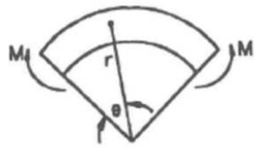
$$A(r,\theta) = A(r) = Cr^2$$



$$A(r,\theta) = A(r) = a \ln r + cr^2$$



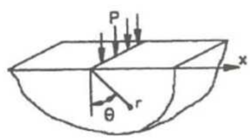
$$A(r,\theta) = A(r) = a \ln r + br^2 \ln r + cr^2$$



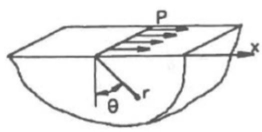
Fonctions d'Airy de quelques chargements (4)

$$\boxed{\sigma_r = \frac{1}{r} A_{,r} + \frac{1}{r^2} A_{,\theta\theta} \qquad \sigma_\theta = A_{,rr} \qquad \tau_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r} A_{,\theta}\right)_{,r}}$$

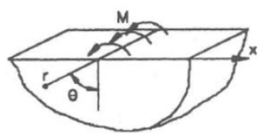
$$A(r,\theta) = cr\theta \sin\theta$$



$$A(r,\theta) = cr\theta \cos\theta$$



$$A(r,\theta) = a\theta + b \sin 2\theta$$

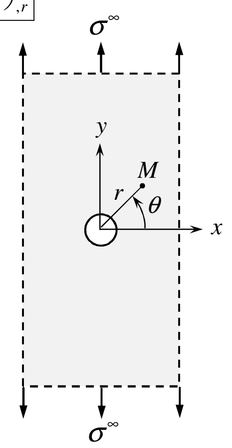


Fonctions d'Airy de quelques chargements (5)

$$\sigma_r = \frac{1}{r}A_{,r} + \frac{1}{r^2}A_{,\theta\theta} \qquad \sigma_\theta = A_{,rr} \qquad \tau_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r}A_{,\theta}\right)_{,r}$$

Plaque infinie chargée en traction
percée d'un trou circulaire

$$A(r,\theta) = br^2 + c\ln r + \left(d + er^2 + \frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$



TD2 : Champ des contraintes dans cette plaque

Montrer que $A(r,\theta)$ est biharmonique.
Calculer les contraintes $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$.
(a est le rayon du trou)

Corrigé TD2

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$$

Plaque infinie chargée en traction
percée d'un trou circulaire de rayon a

$$A(r,\theta) = br^2 + c\ln r + \left(d + er^2 + \frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 2br + \frac{c}{r} + \left(2er - \frac{2f}{r^3}\right)\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = 2b - \frac{c}{r^2} + \left(2e + \frac{6f}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -4\left(d + er^2 + \frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

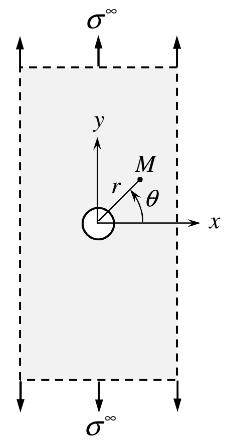
$$\Delta A = 4b - \frac{4d}{r^2}\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial \Delta A}{\partial r} = \frac{8d}{r^3}\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial^2 \Delta A}{\partial r^2} = -\frac{24d}{r^4}\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial^2 \Delta A}{\partial \theta^2} = \frac{16d}{r^2}\cos 2\theta$$

$$\Delta(\Delta A) = 0$$



$A(r,\theta)$ est bien biharmonique.

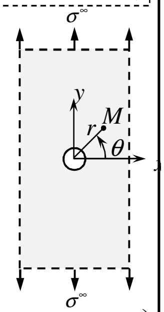
$$A(r,\theta)=br^2+c\ln r+\left(d+er^2+\frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_r=\frac{1}{r}A_{,r}+\frac{1}{r^2}A_{,\theta\theta}\qquad \sigma_\theta=A_{,rr}\qquad \tau_{r\theta}=-\left(\frac{1}{r}A_{,\theta}\right)_{,r}$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}=2br+\frac{c}{r}+\left(2er-\frac{2f}{r^3}\right)\cos 2\theta\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}=2b-\frac{c}{r^2}+\left(2e+\frac{6f}{r^4}\right)\cos 2\theta\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}=-4\left(d+er^2+\frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_r=2b+\frac{c}{r^2}-\left(2e+4\frac{d}{r^2}+6\frac{f}{r^4}\right)\cos 2\theta\qquad -\frac{\partial A}{\partial \theta}=2\left(d+er^2+\frac{f}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta=2b-\frac{c}{r^2}+\left(2e+\frac{6f}{r^4}\right)\cos 2\theta\qquad \tau_{r\theta}=\left(2e-2\frac{d}{r^2}-\frac{6f}{r^4}\right)\sin 2\theta$$



Conditions limites à l'∞

$$\bar{\bar{\sigma}}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sigma^\infty&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \bar{\bar{\sigma}}(r,\theta)=P\cdot\bar{\bar{\sigma}}(x,y)\cdot{}^tP\qquad P=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

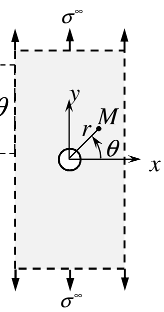
$$\sigma_r=\sigma^\infty\sin^2\theta=\frac{\sigma^\infty}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$\sigma_\theta=\sigma^\infty\cos^2\theta=\frac{\sigma^\infty}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$\tau_{r\theta}=\sigma^\infty\sin\theta\cos\theta=\frac{\sigma^\infty}{2}\sin 2\theta$$

à l'∞ $r>>a$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b=\dfrac{\sigma^\infty}{2}\\[2mm]2e=\dfrac{\sigma^\infty}{2}\end{cases}$$

Conditions limites à $r=a$ $\quad\sigma_r(a,\theta)=\tau(a,\theta)=0\quad\forall\theta$

$$\sigma_r=\frac{\sigma^\infty}{2}+\frac{c}{a^2}-\left(\frac{\sigma^\infty}{2}+4\frac{d}{a^2}+6\frac{f}{a^4}\right)\cos 2\theta\qquad \tau_{r\theta}=\left(\frac{\sigma^\infty}{2}-2\frac{d}{a^2}-\frac{6f}{a^4}\right)\sin 2\theta$$



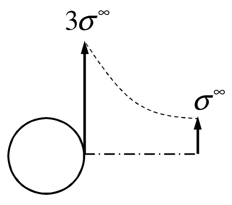
$$\Rightarrow c=-\frac{\sigma^\infty}{2}a^2\quad\text{et}\quad\begin{cases}4\dfrac{d}{a^2}+6\dfrac{f}{a^4}=-\dfrac{\sigma^\infty}{2}\\[2mm]2\dfrac{d}{a^2}+\dfrac{6f}{a^4}=\dfrac{\sigma^\infty}{2}\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{aligned}d&=-\frac{\sigma^\infty}{2}a^2\\6f&=\frac{3\sigma^\infty}{2}a^4\end{aligned}$$

$$\sigma_r=2b+\frac{c}{r^2}-\left(2e+4\frac{d}{r^2}+6\frac{f}{r^4}\right)\cos 2\theta\qquad \sigma_{\theta\theta}=2b-\frac{c}{r^2}+\left(2e+\frac{6f}{r^4}\right)\cos 2\theta\qquad \tau_{r\theta}=\left(2e-2\frac{d}{r^2}-\frac{6f}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

$$2b=\frac{\sigma^\infty}{2}\qquad 2e=\frac{\sigma^\infty}{2}$$

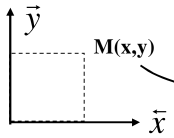
$$\sigma_r=\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$
$$\sigma_\theta=\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$
$$\tau_{r\theta}=\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta(a,0)=3\sigma^\infty$$



Fonction d'Airy en variables complexes

- **Fonctions holomorphes (ou analytiques)**



$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$(x,y) \in Plan \xrightarrow{g} g(x,y) \qquad (x,y) \longrightarrow (z,\bar{z}) \xrightarrow{g} g(z,\bar{z})$$

$$\begin{cases} g_{,x} = g_{,z} + g_{,\bar{z}} \\ g_{,y} = i(g_{,z} - g_{,\bar{z}}) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_{,z} = \dfrac{1}{2}\left(g_{,x} - ig_{,y}\right) \\ g_{,\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(g_{,x} + ig_{,y}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = P(x,y) \\ Q = Q(x,y) \end{cases} \longrightarrow g = P + iQ$$

g **est holomorphe si** $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$

$$\overbrace{g'(z) = \frac{\partial g}{\partial x} = -i\frac{\partial g}{\partial y}}^{\Downarrow}$$

* *Propriétés des fonctions analytiques*

$$g = P + iQ \ \textbf{avec} \ \frac{dg}{dz} = \frac{\partial g}{\partial x} = -i\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Les parties réelle et imaginaire d'une} \\ \textbf{fonction analytique, sont harmoniques}\end{array}\right\} \Leftarrow \quad \overbrace{\Delta P = \Delta Q = 0}^{\Downarrow}$$

Inversement, si $P(x,y)$ **et** $Q(x,y)$ **vérifient les conditions de Cauchy** $\Rightarrow$ $g = P + iQ$ **est analytique**

- ***Si g est analytique, sa dérivée et son intégrale le sont aussi***

Exemples de fonctions analytiques

Les fonctions e^{inz}, z^n et $\ln z$ sont analytiques. Leurs parties réelle et imaginaire qui sont des fonctions harmoniques, peuvent être déterminées.

- $f(z) = e^{inz} = e^{in(x+iy)}$

$$\frac{df}{dz} = ine^{inz}, \ \frac{\partial f}{\partial x} = ine^{in(x+iy)} = \frac{df}{dz} \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y} = -ne^{in(x+iy)} = i\frac{df}{dz}$$
$$f(z) = e^{inz} = e^{inx}e^{-ny} = e^{-ny}\left(\cos nx + i\sin nx\right)$$

Les fonctions harmoniques associées sont $e^{-ny}\cos nx$ et $e^{-ny}\sin nx$.

En échangeant n en $-n$, on voit que $e^{ny}\cos nx$ et $e^{ny}\sin nx$ sont également harmoniques. Il en résulte que :

$\sinh ny \sin nx$, $\cosh ny \sin nx$, $\sinh ny \cos nx$ et $\cosh ny \cos nx$, obtenues par combinaison linéaire des fonctions harmoniques précédentes, sont également harmoniques. Les fonctions $\sinh$ et $\cosh$, appelés respectivement sinus et cosinus hyperboliques, sont définies par :

$$\sinh ny = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \ \text{ et } \ \cosh ny = \frac{e^{ny} + e^{-ny}}{2}$$

- $f(z) = z^n = \left(x+iy\right)^n$

$$\frac{df}{dz} = nz^{n-1}, \ \frac{\partial f}{\partial x} = n\left(x+iy\right)^{n-1} = \frac{df}{dz} \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y} = in\left(x+iy\right)^{n-1} = i\frac{df}{dz}$$
$$f(z) = z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Les fonctions harmoniques associées sont $r^n\cos n\theta$ et $r^n\sin n\theta$. Les fonctions $r^{-n}\cos n\theta$ et $r^{-n}\sin n\theta$ sont également harmoniques.

Le laplacien en coordonnées polaires est donné par $\Delta\bullet = \dfrac{\partial^2\bullet}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bullet}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\bullet}{\partial\theta^2}$

- $f(z) = \ln z = \ln\left(x+iy\right)$

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{z}, \ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+iy} = \frac{df}{dz} \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{i}{x+iy} = i\frac{df}{dz}$$
$$f(z) = \ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta$$

Les fonctions harmoniques associées sont $\ln r$ et θ.

Expressions de la fonction d'Airy

$$\Delta(\Delta \mathrm{A}) = 0$$

Si $P = \Delta A$ **alors** $\Delta P = 0 \;\Rightarrow\; P$ **est harmonique**

$f(z) = P + iQ$ **est analytique avec** $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$

Calcul de $Q(x,y)$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy$$

$$Q = \int dQ = \int\left(-\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy\right)$$

$\varphi(z) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int f(z)dz = p + iq$ **est analytique** $\Rightarrow\; P = 4\dfrac{\partial p}{\partial x} = 4\dfrac{\partial q}{\partial y}$

Si $p_1 = \mathrm{A} - px - qy$ **alors** $\Delta p_1 = 0 \;\Rightarrow\; \chi(z) = p_1 + iq_1$ **est analytique**

$$A = px + qy + p_1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] \\ \mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\chi(z)}\right] \end{cases}$$

Expression des déplacements

$$\begin{cases} 2\mu\,\varepsilon_x = \sigma_x - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y) = \dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y) - \sigma_y \\ 2\mu\,\varepsilon_y = \sigma_y - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y) = \dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y) - \sigma_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu\,\varepsilon_x = \dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta\mathrm{A} - \mathrm{A}_{,xx} \\ 2\mu\,\varepsilon_y = \dfrac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta\mathrm{A} - \mathrm{A}_{,yy} \end{cases}$$

$$\Delta A = P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu U_x = 2\dfrac{(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p - \mathrm{A}_{,x} + \alpha(y) \\ 2\mu U_y = 2\dfrac{(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q - \mathrm{A}_{,y} + \beta(x) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \alpha(y) = cy + d_1 \\ \beta(x) = -cx + d_2 \end{cases}$

$$2\mu\left(U_x + iU_y\right) = 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}(p+iq) - \left(\mathrm{A}_{,x} + i\mathrm{A}_{,y}\right)$$

$$\begin{cases} g_{,z} = \dfrac{1}{2}\left(g_{,x} - ig_{,y}\right) \\ g_{,\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(g_{,x} + ig_{,y}\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\mathrm{A}_{,x} + i\mathrm{A}_{,y}\right) = 2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$$

$$2\mu\left(U_x + iU_y\right) = 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\varphi(z) - 2\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \bar{z}} = 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\varphi(z) - \varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z})$$

avec $\boldsymbol{\psi(z) = \chi'(z)}$

$$2\mu\left(U_x + iU_y\right) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z})$$

avec $\kappa = \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\nu$ **en DP** $\quad \kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ en CP

Expression des contraintes

$$\begin{cases}\sigma_x = A_{,yy} \\ \sigma_y = A_{,xx} \\ \sigma_{xy} = -A_{,xy}\end{cases} \qquad \begin{cases} g_{,x} = g_{,z} + g_{,\bar z} \\ g_{,y} = i(g_{,z} - g_{,\bar z})\end{cases} \qquad \begin{cases} g_{,z} = \frac{1}{2}(g_{,x} - i g_{,y}) \\ g_{,\bar z} = \frac{1}{2}(g_{,x} + i g_{,y})\end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\bar z \varphi(z) + \chi(z) + z\bar\varphi(\bar z) + \bar\chi(\bar z)\right]$$

$$\sigma_x + i\sigma_{xy} = A_{,yy} - iA_{,xy} = -i\left(A_{,x} + iA_{,y}\right)_{,y} = -i\left(2A_{,\bar z}\right)_{,y} = 2\left(A_{,\bar z z} - A_{,\bar z \bar z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x + i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar z) - z\overline{\varphi''}(\bar z) - \overline{\psi'}(\bar z)$$

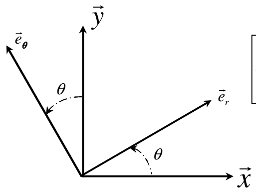
$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = A_{,xx} + iA_{,xy} = \left(A_{,x} + iA_{,y}\right)_{,x} = 2\left(A_{,\bar z}\right)_{,x} = 2\left(A_{,\bar z z} + A_{,\bar z \bar z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y - i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar z) + z\overline{\varphi''}(\bar z) + \overline{\psi'}(\bar z)$$

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar z)\right) = 4\,\mathrm{Re}\left(\varphi'(z)\right) \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2\left(\bar z\varphi''(z) + \psi'(z)\right)$$

$$\begin{cases}\sigma_y + \sigma_x = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2\left(\bar z\varphi''(z) + \chi''(z)\right) = 2\left(\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)\right)\end{cases} \qquad \text{avec } \begin{cases}\Phi(z) = \varphi'(z) \\ \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)\end{cases}$$

* Changement de repère



$$\begin{cases}\vec e_r = \cos\theta.\,\vec x + \sin\theta.\,\vec y \\ \vec e_\theta = -\sin\theta.\,\vec x + \cos\theta.\,\vec y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\vec e_r \\ \vec e_\theta\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}\vec x \\ \vec y\end{pmatrix} \quad \textbf{avec P :} \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_r \\ u_\theta\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}u_x \\ u_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_x\cos\theta + u_y\sin\theta \\ -u_x\sin\theta + u_y\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$u_r + iu_\theta = e^{-i\theta}(u_x + iu_y) \qquad 2\mu\left(u_r + iu_\theta\right) = e^{-i\theta}\left(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(\bar z) - \overline{\psi}(\bar z)\right)$$

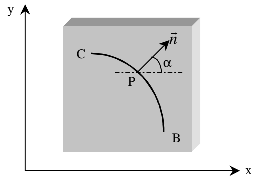
$$\left.\bar{\bar\sigma}\right)_{\vec e_r, \vec e_\theta} = P\left.\bar{\bar\sigma}\right)_{\vec x, \vec y}{}^{t}P \qquad \Rightarrow \begin{cases}\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = e^{2i\theta}\left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy}\right)\end{cases}$$

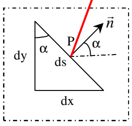
$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left(\bar z\varphi''(z) + \chi''(z)\right) = 2e^{2i\theta}\left(\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)\right)$$

$$\text{avec } \begin{cases}\Phi'(z) = \varphi''(z) \\ \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)\end{cases}$$

Expression du torseur des efforts

$$\vec{T}\left(P,\vec{n}\right) = \bar{\bar{\sigma}}\,\vec{n} = \left(X_n\,,Y_n\right)$$





$$\Rightarrow \vec{n} : \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{dy}{ds} \\ \sin\alpha = -\dfrac{dx}{ds}\end{cases}$$

* Vecteur contrainte

$$X_n = {}^t\vec{x}.\bar{\bar{\sigma}}.\vec{n} = \sigma_x\cos\alpha + \sigma_{xy}\sin\alpha = \mathrm{A}_{,yy}\cos\alpha - \mathrm{A}_{,xy}\sin\alpha$$
$$Y_n = {}^t\vec{y}.\bar{\bar{\sigma}}.\vec{n} = \sigma_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\sin\alpha = -\mathrm{A}_{,xy}\cos\alpha + \mathrm{A}_{,xx}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right) \\ Y_n = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right)\end{cases}$$

* Résultante par unité d'épaisseur sur BC

$$\vec{F} = \int_B^C \vec{T}\left(P,\vec{n}\right)ds \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = \int_B^C X_n\,ds \\ Y = \int_B^C Y_n\,ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \int_B^C X_n\,ds \\ Y = \int_B^C Y_n\,ds \end{cases}$$

$$X + iY = \int_B^C (X_n + iY_n)ds = \int_B^C d\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - i\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right) = -i\left[\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right]_B^C = -2i\left[\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \bar{z}}\right]_B^C$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})\right]$$

$$\Rightarrow \quad X + iY = -i\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi}'\left(\bar{z}\right) + \overline{\psi}\left(\bar{z}\right)\right]_B^C$$

* Moment par unité d'épaisseur en un point O

$$\vec{M} = \int_B^C \vec{OP}\wedge\vec{T}\left(P,\vec{n}\right)ds = (0,0,M)$$

$$\textbf{avec} \;\; M = \int_B^C (xY_n - yX_n)ds = \int_B^C\left[-xd\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\right) - yd\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)\right]$$

$$\textbf{IPP} \quad \Rightarrow \quad M = [\mathrm{A}]_B^C - \left[x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right]_B^C$$

$$\begin{aligned} x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} &= \mathrm{Re}\left[(x+iy)\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} - i\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[2z\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left\{z\left[\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})\right]\right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad M = \mathrm{Re}\left[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\varphi'(z)\right]_B^C$$

avec $\psi(z) = \chi'(z)$

Désignons par $(O;\vec{x},\vec{y},\vec{x}_3)$ le repère plan des coordonnées cartésiennes, et par $(M;\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}_3)$ un repère associé à des coordonnées curvilignes (α,β). La figure 1 montre ces deux repères que l'on choisit orthonormés.

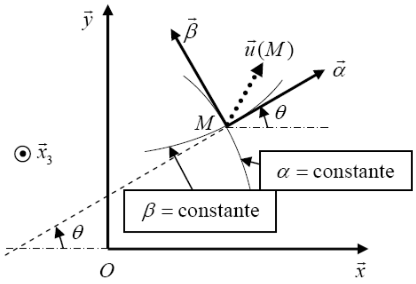
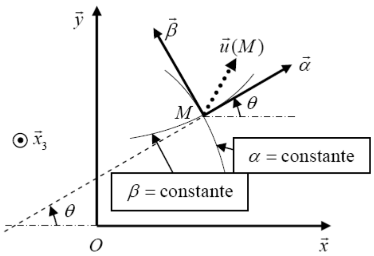


Figure 1

Aux coordonnées (x,y), on associe le complexe $z=x+iy$; et de même aux coordonnées (α,β), on peut associer le complexe $\zeta=\alpha+i\beta$. Comme $x=x(\alpha,\beta)$ et $y=y(\alpha,\beta)$, on a donc :

$$z=f(\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{d\zeta}=f'(\zeta)$$



On montre facilement que $f'(\zeta)=|f'(\zeta)|e^{i\theta}$, autrement dit, l'argument de $f'(\zeta)$ est égal à l'angle θ que font entre eux les deux repères associés respectivement aux coordonnées (x,y) et (α,β).

$$\arg f'(\zeta)=\arg dz-\arg d\zeta=\widehat{\vec{u}(M),\vec{x}}-\widehat{\vec{u}(M),\vec{\alpha}}=\theta$$

Donc, on a bien $f'(\zeta)=|f'(\zeta)|e^{i\theta}$ et de même pour le conjugué $\bar{f}'(\bar{\zeta})=|f'(\zeta)|e^{-i\theta}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})}=e^{2i\theta}$$

Résumé des principaux résultats du chapitre

La résolution d'un problème d'élasticité plane se ramène à la recherche d'une fonction de contrainte, appelée fonction d'Airy A, qui est bi harmonique, c'est-à-dire telle que $\Delta(\Delta A) = 0$.

L'expression de cette fonction de contrainte, à partir des potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, est donnée par :

$$A(x,y) = \mathrm{Re}\left[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi}(\overline{z}) + \chi(z) + \chi(\overline{z})\right]$$

La recherche de la fonction d'Airy revient donc à trouver ces potentiels complexes. Les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement sont alors déterminées par les relations suivantes :

- dans un repère de cordonnées cartésiennes (x, y)

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]$$
$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\left[\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]$$
$$2\mu\left(u_x + iu_y\right) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})$$

- dans un repère associé à d'autres coordonnées (α, β), et faisant un angle θ par rapport au précédent

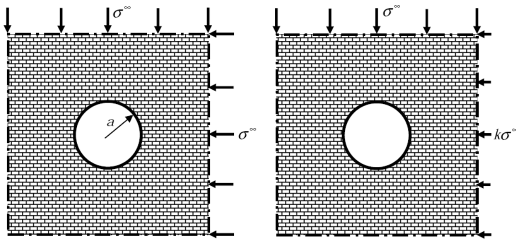
$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z})\right) = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]$$
$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = 2e^{2i\theta}\left[\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right]$$
$$2\mu\left(u_\alpha + iu_\beta\right) = e^{-i\theta}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})\right]$$

avec $\kappa = 3 - 4\upsilon$ ou $\kappa = \dfrac{3-\upsilon}{1+\upsilon}$ selon qu'on est en présence d'un état de déformations planes ou d'un état de contraintes planes.

TD3 : Etude d'un ouvrage souterrain du génie civil

Il s'agit de l'étude de l'équilibre d'un massif rocheux excavé (tunnel de section circulaire) et de son soutènement : le revêtement est soumis au poids et aux réactions de butée du rocher. Ce problème peut être traité à partir des potentiels complexes suivants :

$$\varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \qquad \chi(z) = C\ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2} \qquad A, B, C, D, F \text{ constantes réelles}$$



a) b)

a – Chargement isotrope b – Chargement anisotrope ($0 \leq k < 1$)

1- Donner l'expression des contraintes dans le massif rocheux en fonction des constantes A, B, C, D, F.
2- Déterminer dans le cas du chargement isotrope (figure 3a), les constantes en fonction de la géométrie (rayon a du tunnel) et du chargement (σ^∞) ; donner l'expression du champ des déplacements par intégration des déformations et par utilisation des potentiels complexes.
3- On considère le cas anisotrope (figure 3b) sans réaction de butée ($k = 0$) ; déterminer dans ces conditions les contraintes en fonction des données géométrique et de chargement. Pour quelles valeurs de θ, la contrainte σ_θ le long des parois du tunnel est-elle de traction ? Donner la courbe limitant cette zone.

4- On considère maintenant le cas anisotrope avec $0 < k < 1$. Calculer Les contraintes dans le massif rocheux. Quelles sont les valeurs de k permises pour éviter les contraintes de traction le long des parois du tunnel ?

Corrigé TD3

Etude d'un tunnel $\varphi(z) = Az + \dfrac{B}{z}$ et $\chi(z) = C\ln z + Dz^2 + \dfrac{F}{z^2}$

1- Calcul des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases}$$

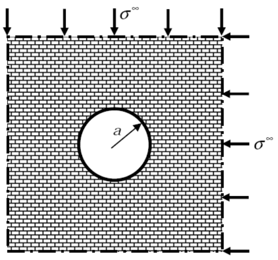
$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\left(A - \dfrac{B}{r^2}\cos 2\theta\right) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = -2\dfrac{C}{r^2} + \left(4D + 4\dfrac{B}{r^2} + 12\dfrac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta + \left(4D - 4\dfrac{B}{r^2} - 12\dfrac{F}{r^4}\right) i\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{C}{r^2} - \left(2D + 4\frac{B}{r^2} + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{C}{r^2} + \left(2D + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2D - 2\frac{B}{r^2} - 6\frac{F}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

$\varphi(z) = Az + \dfrac{B}{z}$ et $\chi(z) = C\ln z + Dz^2 + \dfrac{F}{z^2}$



2- Cas de la compression isotrope (figure 3a)

C.L. à l'∞ $\quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -2\sigma^\infty = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi')_\infty = 4A \Rightarrow A = -\dfrac{\sigma^\infty}{2}$

$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 0 = 2(\bar{z}\varphi'' + \chi'')_\infty \Rightarrow D = 0$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$2A + \dfrac{C}{a^2} = 0 \Rightarrow C = a^2\sigma^\infty$ et $B = F = 0$

D'où en définitive $\sigma_{rr} = -\sigma^\infty(1 - \dfrac{a^2}{r^2})$ $\quad \sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty(1 + \dfrac{a^2}{r^2})$ et $\tau_{r\theta} = 0$

Calcul des déplacements par intégration des déformations

Compte tenu du chargement (isotrope) le déplacement est purement radial.

$2\mu\varepsilon_{rr} = (1-\upsilon)\sigma_{rr} - \upsilon\sigma_{\theta\theta}$ en déformations planes, soit :

$$\boxed{\sigma_r = -\sigma^\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}$$

$$2\mu\varepsilon_{rr} = -\sigma^\infty\left(1-2\upsilon-\frac{a^2}{r^2}\right) = 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \Rightarrow 2\mu u_r = -\sigma^\infty\left((1-2\upsilon)r+\frac{a^2}{r}\right)$$

$$\boxed{\sigma_\theta = -\sigma^\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)}$$

$$\boxed{2\mu\left(u_r + iu_\theta\right) = e^{-i\theta}\left(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\bar{z}) - \overline{\chi}'(\bar{z})\right)}$$

$\boxed{\text{avec } \kappa = 3-4v \text{ en DP}}$

Calcul des déplacements par les potentiels complexes

$$2\mu\left(u_r + iu_\theta\right) = e^{-i\theta}\left((3-4\upsilon)\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\chi}'\right) \qquad \text{avec} \quad \varphi(z) = -\frac{\sigma^\infty}{2}z \text{ et } \chi(z) = a^2\sigma^\infty \ln z$$

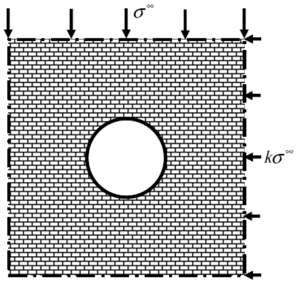
Soit

$$2\mu\left(u_r + iu_\theta\right) = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left((2-4\upsilon)r + 2\frac{a^2}{r}\right) \Rightarrow 2\mu u_r = -\sigma^\infty\left((1-2\upsilon)r+\frac{a^2}{r}\right) \text{ et } u_\theta = 0$$

$$\boxed{\begin{cases}\sigma_{xx}+\sigma_{yy} = \sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi' \\ \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\varphi''+\chi'')\end{cases}}$$

$$\boxed{\varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \text{ et } \chi(z) = C\ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}}$$

3- Cas du chargement anisotrope sans réaction de butée (figure 3b avec $k=0$)



C.L. à l'∞ $\quad \sigma_{xx}+\sigma_{yy} = -\sigma^\infty = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi')_\infty = 4A \quad \Rightarrow A = -\frac{\sigma^\infty}{4}$

$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\tau_{xy} = -\sigma^\infty = 2(\bar{z}\varphi''+\chi'')_\infty \quad \Rightarrow D = -\frac{\sigma^\infty}{4}$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$$2A + \frac{C}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = a^2\frac{\sigma^\infty}{2}$$

$$\begin{cases} 2D + 4\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = 0 \\ 2D - 2\frac{B}{a^2} - 6\frac{F}{a^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = \frac{\sigma^\infty}{2} \\ 2\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \end{cases}$$

$$B = a^2\frac{\sigma^\infty}{2} \quad \text{et} \quad F = -a^4\frac{\sigma^\infty}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2A + \frac{C}{r^2} - \left(2D + 4\frac{B}{r^2} + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2A - \frac{C}{r^2} + \left(2D + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left(2D - 2\frac{B}{r^2} - 6\frac{F}{r^4}\right)\sin 2\theta \end{aligned}}$$

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{C}{r^2} - \left(2D + 4\frac{B}{r^2} + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{C}{r^2} + \left(2D + 6\frac{F}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2D - 2\frac{B}{r^2} - 6\frac{F}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

$$A = D = -\frac{\sigma^\infty}{4} \qquad B = C = \frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \qquad F = -\frac{\sigma^\infty}{4}a^4$$

Et les contraintes s'écrivent alors :

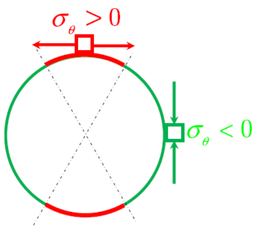
$$\sigma_{rr} = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

Le long des parois $(r = a)$ la contrainte orthoradiale vaut :

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty(1 + 2\cos 2\theta) \qquad \sigma_{\theta\theta} \geq 0 \text{ pour } 60° \leq \theta \leq 120 \text{ et } 240° \leq \theta \leq 300$$



Rq : en remplaçant $-\sigma^\infty \to \sigma^\infty$
on retrouve les résultats du TD2

$$\sigma_r = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

4- Cas du chargement anisotrope avec réaction de butée (figure 3b avec $0 < k < 1$)

C.L. à l'∞

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -(1+k)\sigma^\infty = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi')_\infty = 4A \Rightarrow A = -(1+k)\frac{\sigma^\infty}{4}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = -(1-k)\sigma^\infty = 2(\bar{z}\varphi'' + \chi'')_\infty \Rightarrow D = -(1-k)\frac{\sigma^\infty}{4}$$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$$2A + \frac{C}{a^2} = 0 \Rightarrow C = a^2(1+k)\frac{\sigma^\infty}{2}$$

$$\begin{cases} 2D + 4\dfrac{B}{a^2} + 6\dfrac{F}{a^4} = 0 \\ 2D - 2\dfrac{B}{a^2} - 6\dfrac{F}{a^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{B}{a^2} + 3\dfrac{F}{a^4} = (1-k)\dfrac{\sigma^\infty}{4} \\ \dfrac{B}{a^2} + 3\dfrac{F}{a^4} = -(1-k)\dfrac{\sigma^\infty}{4} \end{cases}$$

$$B = a^2(1-k)\frac{\sigma^\infty}{2} \quad \text{et} \quad F = -a^4(1-k)\frac{\sigma^\infty}{4}$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ s'écrit :

$$\sigma_{\theta\theta} = -(1+k)\frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{a^2}{r^2}) - (1-k)\frac{\sigma^\infty}{2}(1+3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta$$

Sur les parois du tunnel, $\sigma_{\theta\theta}$ vaut :

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty\left(1+k-2(1-k)\cos 2\theta\right) \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

Comme $\cos 2\theta \le 1$, cette contrainte reste négative

si $1+k-2(1-k) \ge 0$ soit pour $k \ge \frac{1}{3}$

Question supplémentaire

Donner l'expression de la fonction d'Airy $A(r,\theta)$ associée aux potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(s)$.

$$\varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \qquad \chi(z) = C\ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}$$

$$A(r,\theta) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] \quad \text{avec} \quad z = re^{i\theta}, \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$A(r,\theta) = \mathrm{Re}\left[Ar^2 + Be^{-2i\theta} + C(\ln r + i\theta) + Dr^2e^{2i\theta} + \frac{F}{r^2}e^{-2i\theta}\right]$$

$$A(r,\theta) = Ar^2 + C\ln r + \left(B + +Dr^2 + \frac{F}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

Expression identique à celle du TD2

$$A(r,\theta) = br^2 + c\ln r + \left(d + er^2 + \frac{f}{r^2}\right)\cos 2\theta$$