Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

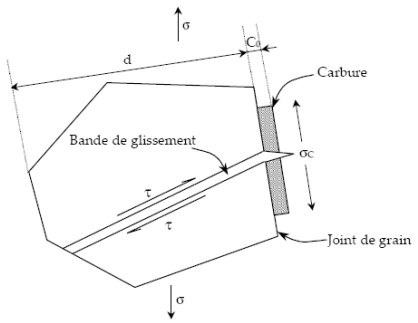
Chapitre 3 – Concentration des contraintes près des entailles

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

1

Rupture par clivage

La rupture par clivage est une rupture fragile qui s'accompagne de très peu de déformation plastique. Dans les matériaux métalliques, le clivage opère par rupture des liaisons interatomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. La figure ci-dessous montre l'amorçage d'une microfissure associée à la rupture par clivage d'un carbure (particule fragile) selon le modèle de Smith[9].



[9]Smith E, The nucleation and growth of microcracks in mild steel, Physical basis of yield and fracture, pp. 36-46, 1966.

Exemples de rupture par clivage

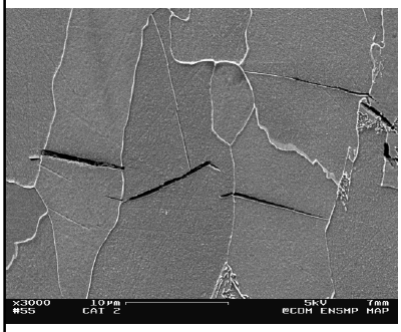


figure V. 4 : Coupe longitudinale[2] d'une éprouvette AE4-50 de métal de base rompue à -196°C (ε_R=13%). Fissures secondaires de clivage déviées ou arrêtées aux joints de grains ferritiques (Attaque Nital 4%).

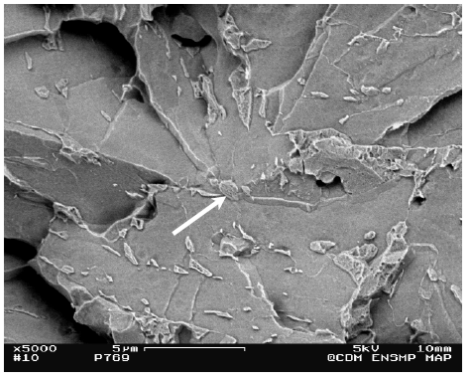
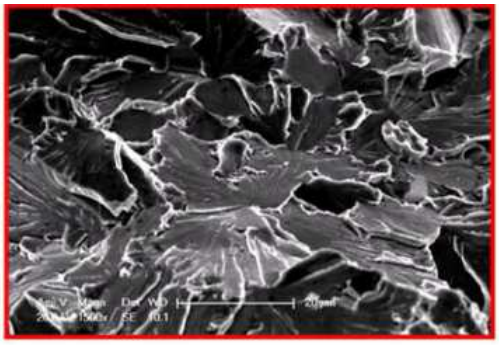
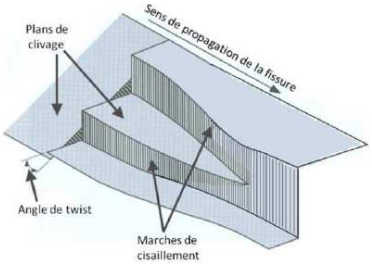


figure V. 8 : Faciès de rupture fragile par clivage d'une éprouvette AE4-50 de ICCGHAZ-100s rompue à -160°C (ε_R=4%). L'attaque Villela révèle la présence d'un composé M-A au site de convergence des rivières.

Astrid Lambert-Perlade. Rupture par clivage de microstructures d'aciers bainitiques obtenues en conditions de soudage. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001. Français. <tel-00005749>



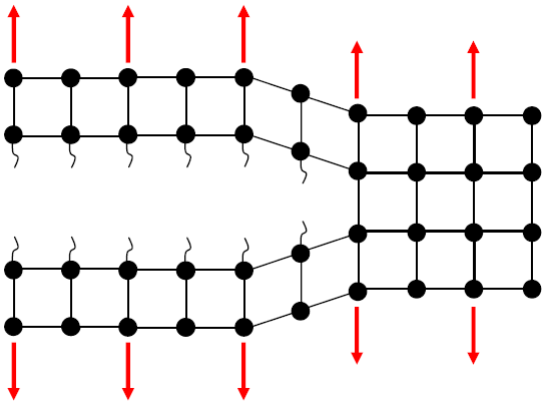


Amaury Bousquet. Critère de propagation et d'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Autre. Ecole Centrale Paris, 2013. Français. <NNT : 2013ECAP0002>. <tel-00927524>

Elément	C	S	P	Si	Mn	Ni	Cr	Mo	Cu	Co	Al
Pourcentage massqiue (a)	x≤ 0,22	x≤ 0,012	x≤ 0,02	0,1 < x < 0,3	1,15 < x < 1,6	0,5 < x < 0,8	x≤ 0,25	0,43 < x < 0,57	x≤ 0,20	x≤ 0,03	x≤ 0,04
Pourcentage massqiue (b)	0,16	0,005	0,006	0,19	1,35	0,74	0,18	0,51	0,07	0,01	0,021

Tableau 2.1.a : Composition chimique de l'acier 16MND5 recommandée par le RCCM (a) et de l'étude (b)

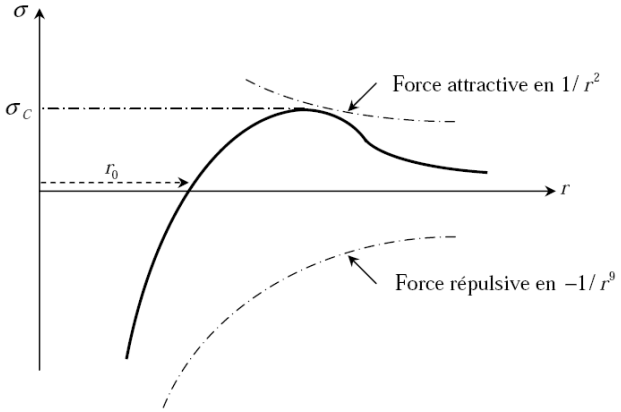
Schématisation de la rupture par clivage



Pour calculer la contrainte de liaison atomique, il est nécessaire d'introduire la distance interatomique r, puis de considérer la relation entre le déplacement des atomes, autour de leur position d'équilibre r_0, et la force appliquée. Cette force est la somme d'une composante d'attraction en $1/r^2$ et d'une composante de répulsion en $-1/r^9$.

La contrainte de liaison est donc de la forme : $\sigma = A\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^9\right]$

La contrainte théorique de clivage, notée σ_c, est la valeur maximale de σ sur la courbe ci-dessous.



La contrainte de clivage σ_c est calculée par deux méthodes différentes.

Première méthode

La déformation étant donnée par $\varepsilon = \log\frac{r}{r_O}$, le module d'Young E s'écrit : $E = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{r=r_0} = r_0\left.\frac{d\sigma}{dr}\right)_{r=r_0}$

En utilisant la relation $\sigma = A\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^9\right]$, il apparait que : $E=7A$

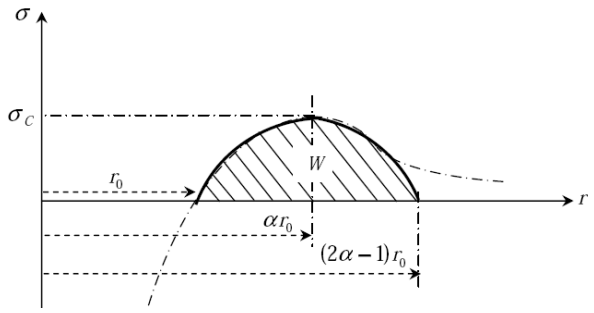
La contrainte théorique de clivage σ_C est définie par la condition $\frac{d\sigma}{dr} = 0$ soit $\frac{r_0}{r} = 0{,}81$.

Soit finalement : $\sigma_c \approx \frac{E}{14}$

Cette contrainte théorique de clivage est plus élevée de plusieurs ordres de grandeur que la contrainte mesurée expérimentalement. En fait les défauts sous forme de fissure ou d'entaille aiguë concentrent les contraintes dans leur voisinage et provoquent ainsi des mécanismes d'amplification, si bien que la contrainte locale qui correspond à la contrainte théorique de clivage est bien plus élevée que la contrainte appliquée expérimentalement.

Deuxième méthode

Cette méthode utilise l'énergie de cohésion. Pour simplifier les calculs, on assimile la courbe $\sigma=\sigma(r)$ à une sinusoïde comme indiquée sur la figure suivante



Sous cette hypothèse, la contrainte de liaison pour $r > r_0$ s'écrit :

$$\sigma = \sigma_C \sin\left[\frac{\pi}{2(\alpha-1)}\left(\frac{r}{r_0}-1\right)\right]$$

si bien que le module d'Young devient : $E = r_0\left.\frac{d\sigma}{dr}\right)_{r=r_0} = \sigma_C\frac{\pi}{2(\alpha-1)}$

D'autre part, on appelle **énergie de cohésion** par unité de surface, la quantité notée W, et définie par : $W = \int_{r_0}^{(2\alpha-1)r_0} \sigma dr$ (*aire hachurée de la figure précédente*) :

$$W = 4\frac{\alpha - 1}{\pi} r_0 \sigma_C$$

Lors de la rupture, deux surfaces sont créées ; on pose alors $W=2\gamma_S$ où γ_S est l'énergie spécifique de création de surface, ce qui permet d'écrire

$$\gamma_S = 2\frac{\alpha - 1}{\pi} r_0 \sigma_C$$

En éliminant α entre cette dernière relation et la relation $E = r_0 \left.\frac{d\sigma}{dr}\right)_{r=r_0} = \sigma_C \frac{\pi}{2(\alpha-1)}$

on obtient $\gamma_S = \frac{\sigma_C}{E} r_0 \sigma_C$ soit : $\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_S}{r_0}}$

Cette contrainte est elle aussi bien plus élevée que les valeurs expérimentales.

Valeurs de la contrainte théorique de clivage σ_{th} déduites de

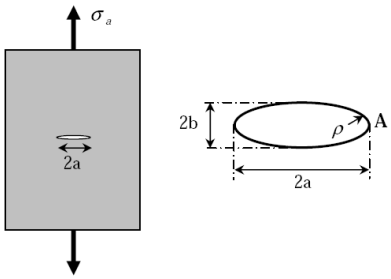
$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_S}{r_0}} \qquad r_0 \approx 2\ddot{A} = 2 \cdot 10^{-10} m$$

Matériaux	γ (J.m^{-2})	E (Gpa)	σ_{th} (Gpa)
Fer	2,0	210	46
Cuivre	1,65	120	31
Zinc	0,75	90	18
Aluminium	0,90	73	18
Tungstène	3,0	360	73
Diamant	5,4	1200	180
Chlorure de sodium	0,115	43	6,2
Oxyde d'aluminium	4,6	420	67
Verre ordinaire	0,54	70	14

$$\sigma_c^{th} >> \sigma_c^{\exp}$$

A l'extrémité d'un défaut de forme elliptique de longueur $2a$ et de rayon à fond d'entaille ρ, la contrainte locale σ_L est donnée par :

$$\sigma_L(A) = \sigma_a\left(1+2\frac{a}{b}\right) = \sigma_a\left(1+2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$



Dans le cas d'une entaille très aiguë, $\rho << a$ si bien que :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Si on prend par exemple le rayon à fond d'entaille ρ de l'ordre d'une distance interatomique r_0, la contrainte locale devient :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a\sqrt{\frac{a}{r_0}}$$

La comparaison des deux relations établies précédemment :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a\sqrt{\frac{a}{r_0}} \qquad \sigma_c \approx \sqrt{\frac{E\gamma_S}{r_0}}$$

Permet d'écrire la contrainte expérimentale de rupture par clivage σ_a sous la forme suivante :

$$\sigma_a \approx \sqrt{\frac{E\gamma_S}{4a}}$$

Cette approximation n'est qu'une estimation de la contrainte de rupture expérimentale par clivage puisqu'à l'échelle atomique, le milieu ne peut être considéré comme continu. Des simulations numériques où les liaisons entre atomes sont modélisées par des ressorts non linéaires, montrent que cette contrainte est de la forme :

$$\sigma_a \approx \beta\sqrt{\frac{E\gamma_S}{a}} \qquad \text{où } \frac{1}{2} < \beta < 1$$

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 4 – Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

13

SOMMAIRE

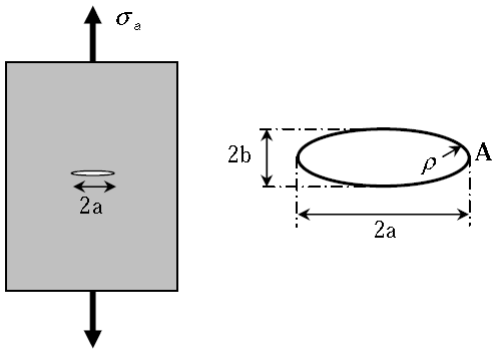
- Introduction – Concept de facteur d'intensité des contraintes *K*
- Modes de sollicitation des fissures
- Approche de Westergaard
- Expression des champs de contrainte et de déplacement
- Définition du FIC K et expressions des champs de contrainte et de déplacement
- Mode de cisaillement anti-plan
- Principe de superposition
- Zone plastifiée à fond de fissure
- Méthodes pratiques de calcul du FIC – Méthode des fonctions poids
- Ténacité - FIC critique
- Approche énergétique de Griffith
- Relation entre énergie de Griffith et FIC K

Introduction

La concentration des contraintes au voisinage d'une entaille, étudiée dans le chapitre précédent, a permis d'introduire le facteur de concentration des contraintes K_t, un paramètre important pour caractériser la sévérité d'une entaille. Ce paramètre est défini pour une plaque percée d'un trou de forme elliptique à partir des longueurs $2a$ et $2b$ des petit axe et grand axe de l'ellipse, ou de a et du rayon à fond d'entaille $\rho = b^2 / a$:

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

$$\sigma_{\max}(A) = K_t \sigma_a$$



Une fissure peut être considérée comme une entaille elliptique très aplatie, c'est-à-dire avec $b << a$ ou encore $\rho << a$. Dans ces conditions, $K_t \to \infty$ et le concept de facteur de concentration des contraintes ne peut alors décrire la répartition des contraintes à l'extrémité d'une fissure. Il est donc nécessaire d'introduire un nouveau paramètre pour caractériser cette répartition : s'appuyant sur les travaux de Westergaard[1], Irwin[2] proposa le concept de Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC). L'application du concept de FIC à la description de la propagation des fissures est appelée communément *Mécanique Linéaire de La Rupture*.

L'utilisation du FIC comme paramètre unique pour décrire la répartition des contraintes au voisinage d'une fissure est justifiée par les similitudes que l'on peut observer entre différentes fissures soumises à des contraintes de traction. La figure 1 montre des clichés obtenus par la méthode photo-élastique pour trois fissures différentes dans une plaque chargée en traction. Ces clichés montrent des franges très similaires, ce qui suggère qu'il en est de même de la répartition des contraintes aux extrémités de ces fissures.

[1] H.M. Westergaard, *Bearing pressures and cracks*, Journal of Applied Mechanics, p. A49-A53, 1939
[2] G.R. Irwin, *Analysis of Stresses and Strains near the end of a crack traversing a plate*, , Journal of Applied Mechanics, p. 361-364, 1957

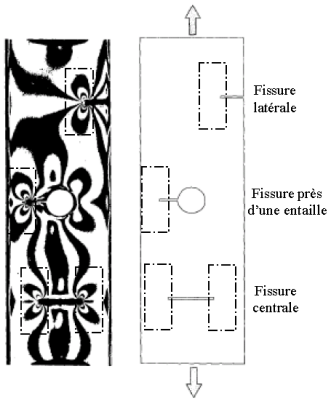


Figure 1. Clichés de photo-élasticité montrant la similitude des champs de contraintes pour trois fissures différentes

Le concept de FIC est présenté dans ce chapitre. Pour déterminer les champs des contraintes et des déplacements à l'extrémité d'une fissure on utilise l'approche de Westergaard qui s'appuie sur les potentiels complexes définissant la fonction d'Airy introduits précédemment. Ces champs sont définis au voisinage immédiat de l'extrémité d'une fissure.

Modes de sollicitation des fissures

Si on considère une fissure dans un plan, on distingue selon la direction de sollicitation trois modes de déplacement des lèvres de la fissure. Ces modes indiqués sur la figure 2 correspondent à différentes cinématiques de déplacement des lèvres de la fissure :

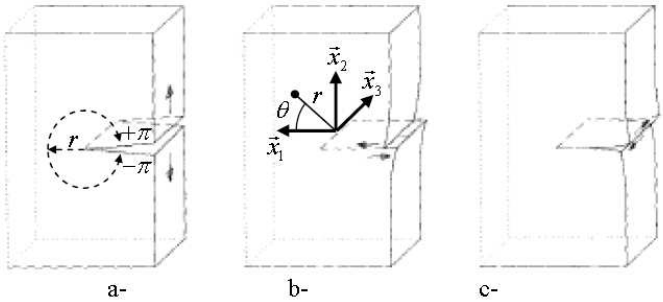


Figure 2. Modes de sollicitation d'une fissure : a- mode I ou mode d'ouverture b- mode II ou de cisaillement plan c- mode III ou de cisaillement antiplan

- **Mode I ou mode d'ouverture** ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1 = 0, \quad u_2(x_1) \neq 0, \quad u_3 = 0$$

- **Mode II ou mode de cisaillement plan** ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1(x_1) \neq 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

- **Mode III ou mode de cisaillement antiplan** ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3(x_1) \neq 0$$

Les modes I et II correspondent à des sollicitations planes, ce qui n'est pas le cas du mode III. Le mode I conduit à une discontinuité des déplacements selon la direction $\vec{x}_2$: $u_2(r,-\pi) = -u_2(r,\pi)$; alors que dans le mode II, la discontinuité est selon la direction $\vec{x}_1$: $u_1(r,-\pi) = -u_1(r,\pi)$.

Les fissures en service ne se présentent pas toujours dans la configuration schématisée sur la figure 2. Lorsqu'elles sont suffisamment longues, elles traversent en général les structures minces telles des plaques, par exemple. Dans les structures plus épaisses, elles peuvent être de coin ou de surface. La figure 3 montre par exemple les différentes configurations de fissures que l'on peut observer au voisinage d'une entaille circulaire. Une fissure traversante avec un front bien défini est généralement traitée comme un problème bi dimensionnel. Pour les fissures de coin ou de surface, on a recours à des calculs tri dimensionnels pour déterminer les champs de contraintes et de déplacements.

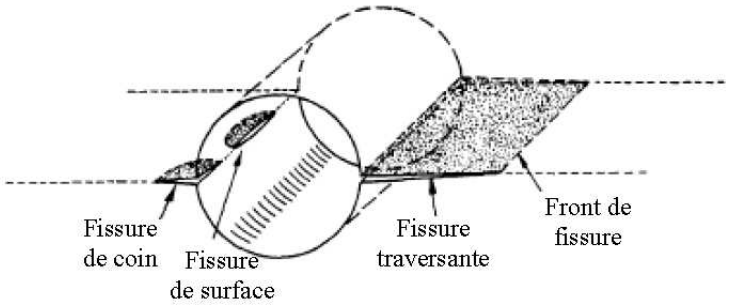


Figure 3. Différentes configurations de fissures au voisinage d'un trou circulaire

Approche de Westergaard

En élasticité plane, les contraintes dérivent d'une fonction de contrainte biharmonique : la fonction d'Airy, notée A, dont l'expression en fonction des potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ est :

$$A = \mathrm{Re}\left(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right)$$

Les contraintes sont données par : $\begin{cases} \sigma_y + \sigma_x = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \chi''(z)\right) \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Im}\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) \end{cases}$$

Considérons à présent un corps solide fissuré, avec une taille de fissure très petite par rapport aux dimensions du corps fissuré. Le corps fissuré étant soumis à un chargement donné, on note $2a$ la longueur de la fissure (figure 4).

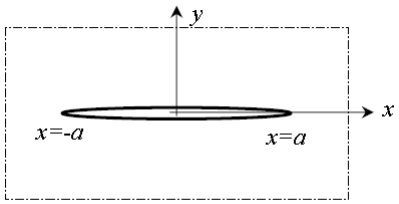


Figure 4. Fissure de longueur $2a$

Les lèvres L de la fissure sont non chargées et donc le vecteur contrainte $\vec{T}(M \in L, \vec{n})$ est nul. La normale aux lèvres étant $\vec{n} = \pm\vec{y}$, on a $\vec{T}(M \in L, \pm\vec{y}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \left(\pm\vec{y}\right) = \vec{0}$, soit :

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \text{ pour } \begin{cases} z = \bar{z} \\ |z| < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z) - \overline{z}\varphi''(z) - \chi''(z)\right) \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z) + \overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Im}\left(\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) \end{cases}$$

Les CL précédentes sur les lèvres de la fissure conduisent donc à :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z) + \overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) = 0 \\ \mathrm{Im}\left(\overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} z = \overline{z} \\ |z| < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\varphi'(z) + z\varphi''(z) + \chi''(z) \ \text{ imaginaire pur} \\ z\varphi''(z) + \chi''(z) \ \text{ réel pur} \end{cases} \quad \text{sur les lèvres } L$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(2\varphi'(z)\right) = -z\varphi''(z) - \chi''(z)$$

$$\mathrm{Re}\left(2\varphi'(z)\right) = -z\varphi''(z) - \chi''(z)$$

La fonction φ peut être décomposée en deux fonctions φ_1 et φ_2 comme suit :

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \varphi'_2 = -z\varphi'' - \chi'' \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_1 \text{ et ses dérivées imaginaires} \\ \varphi_2 \text{ et ses dérivées réelles} \end{cases} \quad \text{sur } L$$

En intégrant la relation $\chi'' = -z\varphi'' - \varphi'_2 = -d\left(z\varphi'\right) + \varphi' - \varphi'_2$, on obtient :

$$\chi'(z) = -z\varphi' + \varphi - \varphi_2 = -d(z\varphi) + 2\varphi - \varphi_2 = -d(z\varphi) + \varphi_1$$

$$\Rightarrow \chi(z) = -z\varphi + \int \varphi_1 dz \qquad A = \mathrm{Re}\left(\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)\right)$$

$$\Rightarrow A = \mathrm{Re}\left(\overline{z}\varphi - z\varphi + \int \varphi_1 dz\right)$$

$$\varphi'_2 = -z\varphi'' - \chi''$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\left(2\varphi' - \bar{z}\varphi'' - \chi''\right) \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\left(2\varphi' + \bar{z}\varphi'' + \chi''\right) \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Im}\left(\bar{z}\varphi'' + \chi''\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\left(\varphi'_1 + 2\varphi'_2 + z\varphi'' - \bar{z}\varphi''\right) \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\left(\varphi'_1 + \bar{z}\varphi'' - z\varphi''\right) \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Im}\left(\bar{z}\varphi'' - z\varphi'' - \varphi'_2\right) \end{cases}$$

$$z = x + iy$$
$$\bar{z} = x - iy$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi'_2 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_1 - y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_2 - \mathrm{Im}\,\varphi'_2 \end{cases}$$

$$A = \mathrm{Re}\left(\bar{z}\varphi - z\varphi + \int \varphi_1 dz\right) = \underbrace{\mathrm{Re}\int \varphi_1 dz + y\,\mathrm{Im}\,\varphi_1}_{A_I} + \underbrace{y\,\mathrm{Im}\,\varphi_2}_{A_{II}}$$

Il apparait donc que le champ des contraintes [σ] est la somme de deux champs [σ_1] et [σ_2] dérivant des fonctions d'Airy suivantes :

$$\begin{cases} A_I = \mathrm{Re}\int \varphi_1 dz + y\,\mathrm{Im}\,\varphi_1 \\ A_{II} = y\,\mathrm{Im}\,\varphi_2 \end{cases}$$

Mode I

Mode II

Westergaard définit pour ces modes les fonctions analytiques suivantes :

$$\begin{cases} Z_I(z) = \varphi'_1(z) \\ Z_{II}(z) = i\varphi'_2(z) \end{cases}$$

Cet auteur note ensuite $Z', Z''\ldots$ les dérivées successives de la fonction $Z(z)$, et $\bar{Z}, \bar{\bar{Z}}\ldots$ ses primitives successives.

$$\begin{cases} A_I = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}}_I + y\,\mathrm{Im}\,\bar{Z}_I \\ A_{II} = -y\,\mathrm{Im}\,i\bar{Z}_{II} = -y\,\mathrm{Re}\,\bar{Z}_{II} \end{cases}$$

Expressions des contraintes et des déplacements par la méthode de Westergaard

Avant d'effectuer les calculs, il convient de rappeler que pour toute fonction analytique $g(z)$, on a :

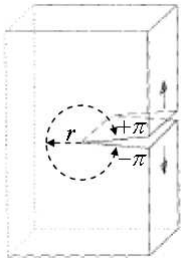
$$g = \alpha + i\beta = \mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g$$

$$g' = \frac{dg}{dz} = \frac{\partial g}{\partial x} = -i\frac{\partial g}{\partial y} \text{ d'où } \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x} = -i\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

Il s'ensuit donc que :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, g' = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\, g = \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}\, g \\ \mathrm{Im}\, g' = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\, g = -\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\, g \end{cases}$$

Mode I d'ouverture



$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi'_2 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_1 - y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_2 - \mathrm{Im}\,\varphi'_2 \end{cases}$$

Expressions des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_1 \end{cases}$$

comme $\varphi'_1 = Z_I \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\, Z_I - y\,\mathrm{Im}\, Z'_I \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\, Z_I + y\,\mathrm{Im}\, Z'_I \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\, Z'_I \end{cases}$$

Expressions des déplacements

Loi de Hooke $\begin{cases} 2\mu\varepsilon_x = (1-\upsilon^*)\sigma_x - \upsilon^*\sigma_y \\ 2\mu\varepsilon_y = (1-\upsilon^*)\sigma_y - \upsilon^*\sigma_x \\ 2\mu\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy} \end{cases}$

avec $\begin{cases} \upsilon^* = \upsilon \text{ en DP} \\ \upsilon^* = \dfrac{\upsilon}{1+\upsilon} \text{ en CP} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'_I \end{cases}$$

$$2\mu\varepsilon_x = (1-2\upsilon^*)\operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 2\mu u_x = (1-2\upsilon^*)\operatorname{Re}\bar{Z}_I - y \operatorname{Im} Z_I$$

$$2\mu\varepsilon_y = \begin{cases} (1-\upsilon^*)\sigma_y - \upsilon^*\sigma_x \\ (1-2\upsilon^*)\operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Z_I = \dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\bar{Z}_I \\ \operatorname{Im} Z'_I = -\dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} Z_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} g' = \dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} g = \dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} g \\ \operatorname{Im} g' = \dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} g = -\dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} g \end{cases}$$

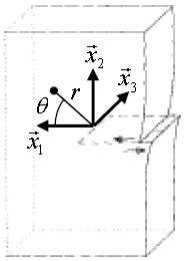
$$y \operatorname{Im} Z'_I = -y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} Z_I = -\frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{Re} Z_I) + \underbrace{\operatorname{Re} Z_I}_{\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\bar{Z}_I}$$

$$2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} = 2(1-\upsilon^*)\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\bar{Z}_I - \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{Re} Z_I)$$

$$\Rightarrow 2\mu u_y = 2(1-\upsilon^*)\operatorname{Im}\bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I$$

Mode II - cisaillement plan

$$\begin{cases} \sigma_x = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi'_2 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_y = \mathrm{Re}\,\varphi'_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_1 + y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_1 - y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_2 - \mathrm{Im}\,\varphi'_2 \end{cases}$$



Expressions des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\,\varphi'_2 - y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_y = y\,\mathrm{Im}\,\varphi''_2 \\ \sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,\varphi''_2 - \mathrm{Im}\,\varphi'_2 \end{cases}$$

comme $\varphi'_2 = -iZ_{II} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\,\mathrm{Im}\,Z_{II} + y\,\mathrm{Re}\,Z'_{II} \\ \sigma_y = -y\,\mathrm{Re}\,Z'_{II} \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Re}\,Z_{II} - y\,\mathrm{Im}\,Z'_{II} \end{cases}$$

Expressions des déplacements

Loi de Hooke
$$\begin{cases} 2\mu\varepsilon_x = (1-\upsilon^*)\sigma_x - \upsilon^*\sigma_y \\ 2\mu\varepsilon_y = (1-\upsilon^*)\sigma_y - \upsilon^*\sigma_x \\ 2\mu\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\,\mathrm{Im}\,Z_{II} + y\,\mathrm{Re}\,Z'_{II} \\ \sigma_y = -y\,\mathrm{Re}\,Z'_{II} \\ \sigma_{xy} = \mathrm{Re}\,Z_{II} - y\,\mathrm{Im}\,Z'_{II} \end{cases}$$

$$2\mu\varepsilon_x = 2(1-\upsilon^*)\,\mathrm{Im}\,Z_{II} + y\,\mathrm{Re}\,Z'_{II} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 2\mu u_x = 2(1-\upsilon^*)\,\mathrm{Im}\,\overline{Z}_{II} + y\,\mathrm{Re}\,Z_{II}$$

$$2\mu\varepsilon_y = \begin{cases} (1-\upsilon^*)\sigma_y - \upsilon^*\sigma_x \\ -2\upsilon^* \operatorname{Im} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z'_{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_y = -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_{xy} = \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Z'_{II} = \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} Z_{II} \\ \operatorname{Im} Z_{II} = -\dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} g' = \dfrac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} g = \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g \\ \operatorname{Im} g' = \dfrac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} g = -\dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g \end{cases}$$

$$-y \operatorname{Re} Z'_{II} = -y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} Z_{II} = -\frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{Im} Z_{II}) + \underbrace{\operatorname{Im} Z_{II}}_{-\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}\bar{Z}_{II}}$$

$$2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} = -(1-2\upsilon^*)\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} - \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{Im} Z_{II})$$

$$\Rightarrow 2\mu u_y = -\left((1-2\upsilon^*) \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} + y \operatorname{Im} Z_{II}\right)$$

Expressions des contraintes et des déplacements à partir du facteur d'intensité des contraintes

Il convient dans un premier temps de déterminer les fonctions analytiques Z_I et Z_{II} introduites par Westergaard. Considérons par exemple la fonction Z_I (le raisonnement est applicable au mode II aussi) et examinons les conditions limites au voisinage des extrémités d'une petite fissure de longueur $2a$ sollicitée en mode I (figure 5).

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'_I \end{cases}$$

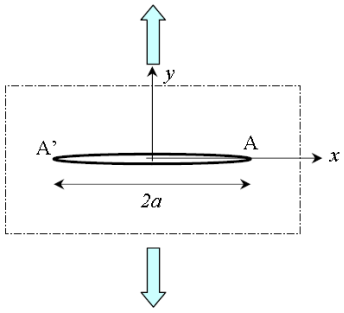


Figure 5. Fissure de longueur $2a$ sollicitée en mode I

Sur le plan de la fissure (à y=0), on a :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{à } y = 0$$

Les lèvres de la fissure étant non chargées, les CL sont : $\begin{cases} \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \\ \text{à } y = 0 \text{ et } |z| < a \end{cases}$

Des deux relations précédentes, on déduit que :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \\ \text{à } y = 0 \text{ et } |z| < a \end{cases}$$

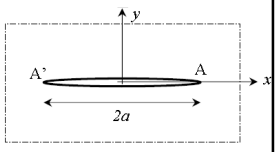
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{à } y = 0$$

Considérons à présent la contrainte σ_y seule. De part et d'autre des extrémités de la fissure, elle est soit nulle, soit elle tend vers l'infini ($K_t \to \infty$). Il s'ensuit que la fonction $Z_I(z)$ doit être de la forme :

$$Z_I(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

Avec $g(z)$ fonction réelle pour y=0 et finie pour $z=\pm a$

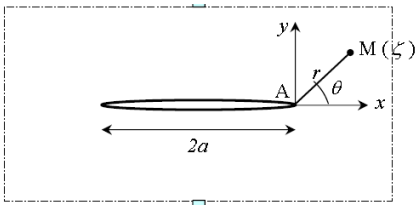
Les conditions limites sont alors vérifiées puisque sur le plan de la fissure, on a :



$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ imaginaire pur pour $|z| < a \Rightarrow \operatorname{Re} Z_I = 0$

$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ réel pur pour $|z| > a \Rightarrow \operatorname{Re} Z_I \xrightarrow[z \to -a^-]{z \to +a^+} \infty$

Les extrémités A et A' jouent des rôles identiques. On fait alors une translation de repère avec pour origine A, ce qui équivaut au changement de variable suivant :



$$\zeta = z - a$$

Un point M sera repéré par rapport à A par : $\zeta = re^{i\theta}$

La fonction de contrainte de Westergaard s'écrit alors :

$$Z_I(z) = \frac{g_1(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} \quad \text{avec} \quad g_1(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \cdots$$

Comme on cherche à déterminer les champs de contraintes et de déplacements au voisinage immédiat de l'extrémité A de la fissure (champs asymptotique), c'est à dire lorsque $|\zeta| \to 0$, la fonction $Z_I(\zeta)$ peut s'écrire :

$$Z_I(\zeta) \approx \frac{\alpha_0}{\sqrt{\zeta}}$$

Le facteur d'intensité des contraintes (FIC) que l'on note K_I en mode I d'ouverture, est défini par :

$$K_I = \lim_{z \to a} \sqrt{2\pi(z-a)}Z_I(z) = \lim_{\zeta \to 0} \sqrt{2\pi\zeta}\, Z_I(\zeta) = \sqrt{2\pi}\alpha_0$$

$$Z_I(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

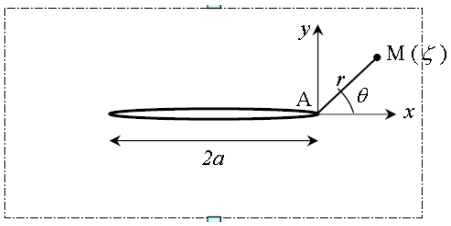
Comme la fonction de Westergaard Z a la dimension d'une contrainte, le FIC K_I aura pour dimension une contrainte $\cdot\sqrt{\text{longueur}}$; l'unité usuelle pour le FIC est le $MPa\sqrt{m}$.

• Pour le mode de cisaillement plan (mode II), la même démarche que précédemment conduit à un résultat similaire au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure :

$$Z_{II}(z) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

avec K_{II} ***facteur d'intensité des contraintes en mode II (cisaillement plan).***

$$Z_I(\zeta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad \text{avec} \quad \zeta = re^{i\theta}$$



$$\mathrm{Re}\, Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \mathrm{Im}\, Z_I = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$Z'_I = -\frac{1}{2}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\zeta^{3/2}} \qquad \mathrm{Re}\, Z'_I = -\frac{1}{2r}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{3\theta}{2} \qquad \mathrm{Im}\, Z'_I = \frac{1}{2r}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{3\theta}{2}$$

$$\bar{Z}_I = 2\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\zeta^{1/2} \qquad \mathrm{Re}\, \bar{Z}_I = 2K_I\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \mathrm{Im}\, \bar{Z}_I = 2K_I\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}$$

Expressions des contraintes et des déplacements

A partir des expressions précédentes des dérivées et primitives de Z_I, et en notant que :

$$y = 2r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

on calcule les contraintes et les déplacements (schématisés ci-dessous) en se servant des relations suivantes :

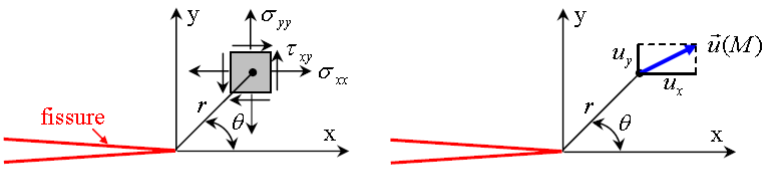


Figure 7. Contraintes et déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I \\ \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'_I \end{cases}$$

$$2\mu u_x = (1-2\upsilon^*) \operatorname{Re} \bar{Z}_I - y \operatorname{Im} Z_I$$

$$2\mu u_y = 2(1-\upsilon^*) \operatorname{Im} \bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I$$

$$\operatorname{Re} Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} Z_I = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\bar{Z}_I = 2\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \zeta^{1/2} \qquad \operatorname{Re} \bar{Z}_I = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} \bar{Z}_I = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$Z'_I = -\frac{1}{2}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\zeta^{3/2}} \qquad \operatorname{Re} Z'_I = -\frac{1}{2r}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{3\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} Z'_I = \frac{1}{2r}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{3\theta}{2}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\upsilon^* + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2(1-\upsilon^*) - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

On a bien en mode I sur les lèvres de la fissure
une discontinuité du déplacement selon *y*, $u_y(\pi)=-u_y(-\pi)$

Mode II - cisaillement plan

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_y = -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_{xy} = \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{cases}$$

$$2\mu u_x = 2(1-\upsilon^*) \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II}$$

$$2\mu u_y = -\left((1-2\upsilon^*) \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} + y \operatorname{Im} Z_{II}\right)$$

$$\operatorname{Re} Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} Z_{II} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\bar{Z}_{II} = 2\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \zeta^{1/2} \qquad \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} = 2K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} = 2K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$Z'_{II} = -\frac{1}{2}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}\zeta^{3/2}} \qquad \operatorname{Re} Z'_{II} = -\frac{1}{2r}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{3\theta}{2} \qquad \operatorname{Im} Z'_{II} = \frac{1}{2r}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{3\theta}{2}$$

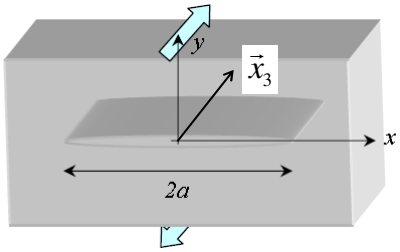
$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2(1-\upsilon^*) + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_y = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\upsilon^* - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

On a bien en mode II sur les lèvres ee la fissure
une discontinuité du déplacement selon *x*, $u_x(\pi)=-u_x(-\pi)$

Mode de cisaillement anti-plan

Lorsque une structure fissurée est en mode de cisaillement anti-plan, les lèvres de la fissure se déplacent, comme le montre la figure suivante, selon une direction perpendiculaire au plan (x,y).



Le champ des déplacements est alors de la forme :

$$\vec{u} = u_3 \vec{x}_3 \quad \text{avec} \quad u_3 = u_3(x, y)$$

Les déformations en HPP sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \dfrac{1}{2} u_{3,1} \\ \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \dfrac{1}{2} u_{3,2} \end{cases}$$

Loi de Hooke $\begin{cases} \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} = \mu u_{3,1} \\ \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} = \mu u_{3,2} \end{cases}$

Equation d'équilibre $\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0$

$$\Rightarrow \Delta u_3 = 0$$

La composante u_3 du déplacement est donc harmonique. Elle peut être alors considérée comme partie réelle ou imaginaire d'une fonction analytique.

L'approche de Westergaard peut être utilisée pour traiter le problème du cisaillement antiplan. Si on note Z_{III} la fonction de Westergaard associée à ce problème, on montre que le déplacement peut se mettre sous la forme :

$$u_3 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \overline{Z}_{III}$$

Comme Z_{III} est homogène à une contrainte, $\overline{Z}_{III}$ est homogène à une contrainte·longueur, si bien que $\overline{Z}_{III}/\mu$ est homogène à une longueur donc pouvant décrire un déplacement.

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{3,1} \\ \sigma_{23} = \mu u_{3,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} g' = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} g = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g \\ \operatorname{Im} g' = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} g = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = \operatorname{Im} Z_{III} \\ \sigma_{23} = \operatorname{Re} Z_{III} \end{cases}$$

La fonction Z_{III} a la même forme que Z_I et Z_{II} :

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

K_{III} est le facteur d'intensité des contraintes en mode III

Les contraintes et le déplacement en mode III sont alors donnés par :

$$u_3 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \overline{Z}_{III}$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \operatorname{Im} Z_{III} \\ \sigma_{23} = \operatorname{Re} Z_{III} \end{cases}$$

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \\ u_3 = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

TD8 : Fissure sollicitée en mode I

A partir des formules donnant les contraintes élastiques à fond de fissure en fonction du facteur d'intensité des contraintes (FIC) K_I :

1°- Calculer σ_x, σ_y et σ_{xy} pour $\theta = 0, 45, 90, 135$ et $180°$ et à une distance r de l'extrémité de la fissure.

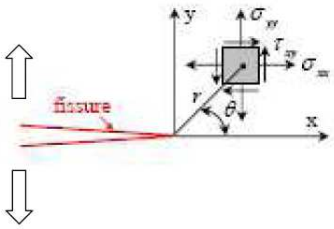
2°- Représenter l'état de contrainte autour de la fissure pour un petit élément découpé autour du point courant M, pour tous les angles considérés en 1°.

3°- Déterminer, en utilisant la construction de Mohr, les directions et les contraintes principales autour de la fissure. Quelles sont ces valeurs, en fonction de K_I et de r, pour $\theta = 45$ et $90°$?

4°- Pour quelle valeur de θ la contrainte normale est-elle maximale ?

Corrigé du TD8

Fissure sollicitée en mode d'ouverture



Les contraintes pour une fissure sollicitée en mode I, s'écrivent :

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_x = \sigma_x \Big/ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

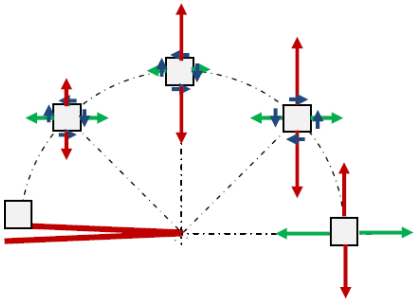
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_y = \sigma_y \Big/ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \Big/ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

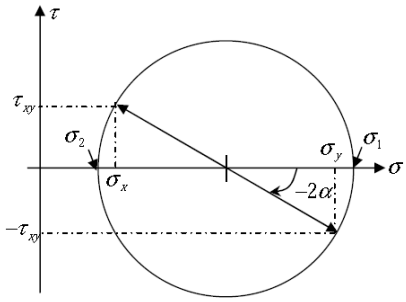
1- Calcul des $\tilde{\sigma}_{ij}$ pour $\theta = 0, 45, 90, 135$ et $180°$

θ	0	45	90	135	180
$\tilde{\sigma}_x$	1	0,60	0,35	0,52	0
$\tilde{\sigma}_y$	1	1,25	1,06	0,25	0
$\tilde{\tau}_{xy}$	0	0,135	-0,35	-0,33	0

2- Représentation de l'état de contrainte autour de la fissure



3- Construction de Mohr (α angle entre la direction principale $\vec{1}$ et la direction $\vec{y}$)



Les contraintes principales, σ_1 (la plus élevée) et σ_2, et l'angle α, sont donnés d'après la construction ci-dessus par :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\tan(-2\alpha) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = -\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Pour $\theta = 45$: $\sigma_1 = 1,28\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\quad \sigma_2 = 0,57\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\quad \alpha = 11,25°$

Pour $\theta = 90°$: $\sigma_1 = 1,21\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\quad \sigma_2 = 0,21\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\quad \alpha = -22,5°$

4- Pour quelle valeur de θ la contrainte σ_1 est-elle maximale ?

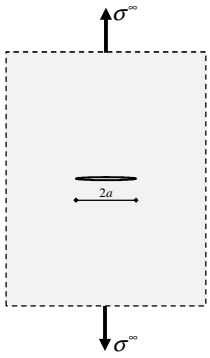
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - 1 = 0 \qquad \text{soit} \quad \theta = 60° \text{ et } \sigma_1 = 1,30\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

TD9 : Calcul du FIC K à partir de la fonction de Westergaard

I- Montrer que la fonction de Westergaard suivante décrit bien le chargement indiqué où la plaque infinie comporte une fissure de longueur 2*a*. Calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

$$Z_I = \frac{\sigma^\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$



Corrigé du TD9

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\, Z_I + y\, \mathrm{Im}\, Z_I' \qquad Z_I' = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sigma^\infty z^2}{\left(z^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

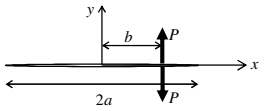
$$\lim_{|z|\to\infty} Z_I = \sigma^\infty \qquad \lim_{|z|\to\infty} Z_I' = 0 \qquad \sigma_y\big|_{|z|\to\infty} = \sigma^\infty \quad \text{CL vérifiée}$$

$$K_I = \lim_{|z|\to a}\sqrt{2\pi(z-a)}Z_I(z) = \sigma^\infty \lim_{|z|\to a}\sqrt{2\pi(z-a)}\frac{z}{\sqrt{(z-a)(z+a)}}$$

$$\Rightarrow K_I = \sigma^\infty\sqrt{\pi a}$$

II- Soit le chargement 1 d'une plaque infinie fissurée dont la fonction de Westergaard associée est:

$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$ avec P force concentrée en $z=b$



Chargement 1

1- Montrer que la fonction de Westergaard Z_I décrit bien le chargement 1

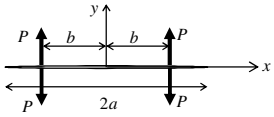
2- calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

3- Déterminer la fonction de Westergaard du chargement 2

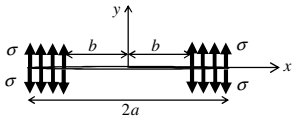
4- Calculer le FIC K_I du chargement 2 à l'extrémité $x=a$

5- Calculer à partir de 4- le FIC K_I à l'extrémité $x=a$ pour le chargement 3 où σ est une contrainte répartie.

6- Montrer à partir de 4- que la fn de Westergaard du chargement 3 est :



Chargement 2



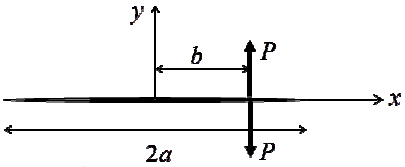
Chargement 3

$$Z(z) = \frac{2\sigma}{\pi}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{b}{z}\sqrt{\frac{z^2-a^2}{a^2-b^2}}\right)\right]$$

Corrigé du TD9 – question II

1- Montrer que la fonction de Westergaard Z_I décrit bien le chargement 1

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'$$



Lorsque $z \to b$ point d'application de la charge concentrée,

$$Z_I = \frac{iP}{\pi(z-b)}$$

$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$

La force concentrée P_y est donnée par

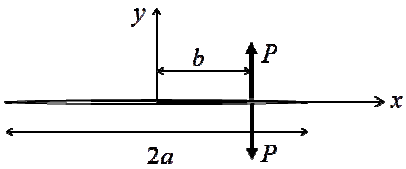
$$P_y = \lim_{y\to 0^+}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \sigma_y \overset{1}{\tilde{e}}\, dx = \frac{P}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \operatorname{Re}\left[\frac{i}{x-b+iy}\right]dx$$

$$P_y = \frac{P}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{y}{(x-b)^2+y^2}\,dx$$

$$P_y = \frac{P}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\left[\arctan\frac{x-b}{y}\right]_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} = \frac{2P}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\arctan\frac{\varepsilon}{y} = \frac{2P}{\pi}\frac{\pi}{2} = P$$

CL bien vérifiée

2- Calcul du FIC K_I à l'extrémité $x=a$



$$z-a=\zeta \Rightarrow Z_I=\frac{P}{\pi(\zeta+a-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\zeta(\zeta+2a)}}$$

$$K_I=\lim_{|\zeta|\to 0}\sqrt{2\pi\zeta}\,Z_I(\zeta)=\sqrt{2\pi}\,\frac{P}{\pi(a-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}} \qquad Z_I=\frac{P}{\pi(z-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$

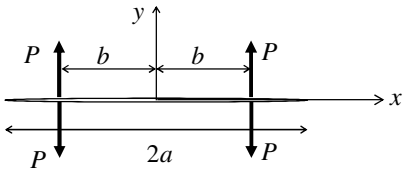
$$\Rightarrow K_I=\frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

ou plus simplement $K_I=\lim_{|z|\to a}\sqrt{2\pi(z-a)}Z_I(z)=\frac{\sqrt{2\pi}P}{\pi(a-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}$

$$\Rightarrow K_I=\frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

3- Déterminer la fonction de Westergaard du chargement 2

$$Z_I=\frac{P}{\pi(z-b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}+\frac{P}{\pi(z+b)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$



$$Z_I=\frac{P}{\pi}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}\,\frac{2z}{z^2-b^2}=\frac{2Pz}{\pi(z^2-b^2)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$

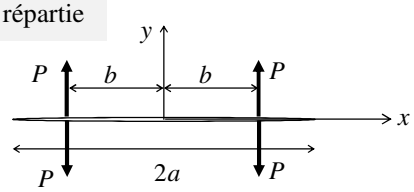
4- Calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

$$K_I=\lim_{|z|\to a}\sqrt{2\pi(z-a)}Z_I(z)=\sqrt{2\pi}\,\frac{2Pa}{\pi(a^2-b^2)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}$$

$$\Rightarrow K_I=\frac{2P}{\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

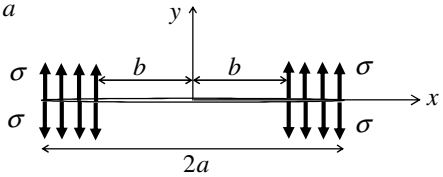
5- Calcul à partir de 4- du FIC K_I à l'extrémité $x=a$ pour le chargement 3 où σ est une contrainte répartie

$$\Rightarrow K_I = \frac{2P}{\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$$



On remplace P par σdx, et on intègre de b à a

$$K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$



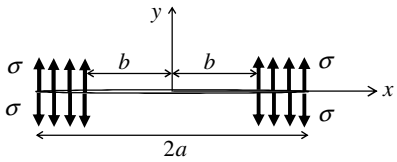
$$K_I = -2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left[\arccos\frac{x}{a}\right]_b^a$$ changement de variable $x = a\cos\alpha$

$$\Rightarrow K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}\arccos\frac{b}{a}$$

Remarque $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ lorsque $b=0$

6- Montrer à partir de 4- que la fonction de Westergaard du chargement 3 s'écrit :

$$Z_I(z) = \frac{2\sigma}{\pi}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{b}{z}\sqrt{\frac{z^2-a^2}{a^2-b^2}}\right)\right]$$



Chargement 2 $\quad Z_I = \frac{2Pz}{\pi(z^2-b^2)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$

Chargement 3 $\quad Z_I = \frac{2\sigma z}{\pi\sqrt{z^2-a^2}}\int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z^2-x^2}dx$

Posons $x = a\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} dx = -a\sin\theta d\theta \\ \theta = \cos^{-1}(x/a) \end{cases}$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z^2-x^2}dx = \int \frac{-a^2\sin^2\theta}{z^2-a\ \cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int \frac{-a^2\sin^2\theta}{z^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-a^2\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{-a^2}{\left(z^2-a^2\right)\cot^2\theta+z^2}d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z^2-x^2}dx = \int \frac{-a^2}{\left(z^2-a^2\right)\cot^2\theta + z^2}d\theta$$

On pose ensuite $t=\cot\theta \Rightarrow \begin{cases} dt = -(1+\cot^2\theta)d\theta \\ d\theta = -\dfrac{dt}{1+t^2} \text{ avec } \theta = \cot^{-1} t \end{cases}$

$$\int \frac{a^2}{\left(z^2-a^2\right)t^2+z^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{z^2-a^2}{\left(z^2-a^2\right)t^2+z^2}\right]dt$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = -\cot^{-1} t = -\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

Posons $u = \dfrac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}t \Rightarrow du = \dfrac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}dt$

$$1+u^2 = \frac{z^2+(z^2-a^2)t^2}{z^2} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\frac{z^2}{z^2+(z^2-a^2)t^2}dt$$

$$\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\frac{du}{1+u^2} = \frac{z^2-a^2}{z^2+(z^2-a^2)t^2}dt$$

$$\int -\frac{z^2-a^2}{\left(z^2-a^2\right)t^2+z^2}dt = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\int -\frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\cot^{-1} u$$

$$u = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}t \Rightarrow du = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}dt$$

$$\int -\frac{z^2-a^2}{\left(z^2-a^2\right)t^2+z^2}dt = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\int -\frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\cot^{-1} u$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = -\cot^{-1} t = -\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

$$Z_I(z) = \frac{2\sigma}{\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z^2-x^2}dx = \frac{2\sigma}{\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\left[\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\cot^{-1} u - \cos^{-1}\frac{x}{a}\right]_{x=b}^{x=a}$$

Bornes $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{a} \text{ et } t = \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x}{a\sqrt{1-x^2/a^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ u = \dfrac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}t = \dfrac{x}{z}\sqrt{\dfrac{z^2-a^2}{a^2-x^2}} \\ b<x<a \Rightarrow \cot^{-1}\left[\dfrac{b}{z}\sqrt{\dfrac{z^2-a^2}{a^2-b^2}}\right] < \cot^{-1} u < 0 \end{cases}$

$$Z_I(z) = \frac{2\sigma}{\pi}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{b}{z}\sqrt{\frac{z^2-a^2}{a^2-b^2}}\right)\right]$$