Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

Chapitre 4 – Intensification des contraintes à l'extrémité des fissures

Prof. Abderrahim Zeghloul
Université de Lorraine

SOMMAIRE

Principe de superposition en MLR

Le principe de superposition affirme que dans un matériau élastique linéaire, les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements sont « additives ». Cette superposition est cependant soumise à certaines règles : par exemple, deux contraintes normales selon la direction $\vec{x}$ peuvent s'ajouter entre elles, alors qu'une contrainte normale ne peut être additionnée à une contrainte de cisaillement. Il en est de même pour les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) : on ne peut additionner des FIC que s'ils concernent le même mode de sollicitation (mode I, II ou III).

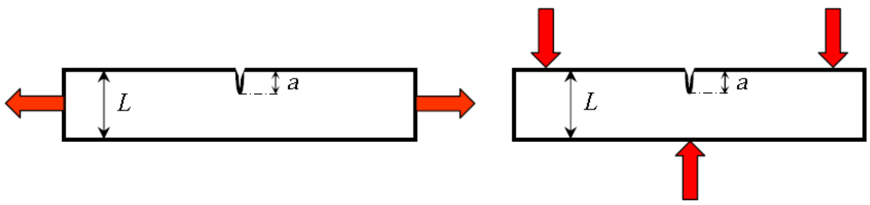
Considérons par exemple une fissure sollicitée en mode I par trois chargements différents ($\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$). Le principe de superposition permet d'écrire :

$$K_I^{total} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} + K_I^{(3)}$$

Si la même fissure est sollicitée simultanément en mode I, en mode II et en mode III, le FIC $K^{(total)}$ n'est en aucun cas la somme de K_I, K_{II} et K_{III} :

$$K^{total} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

L'exemple de la figure ci-dessous illustre le principe de superposition.

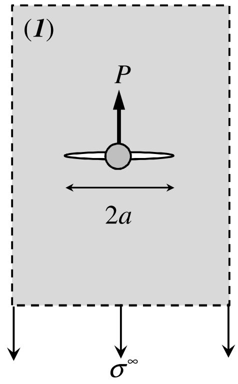


Les FIC K_I sont connus pour les chargements de traction et de flexion (voir manuels spécialisés). Et comme ces deux chargements conduisent à des sollicitations de la fissure en mode I, la solution est :

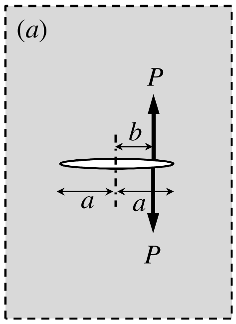
$$K_I^{total} = K_I^{traction} + K_I^{flexion}$$

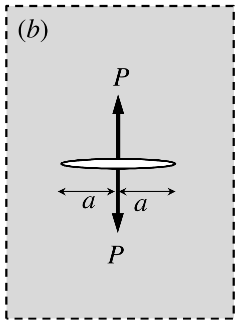
Dans de nombreux cas, le principe de superposition permet de déterminer le FIC d'une configuration de chargement relativement complexe. L'idée, qui est naturelle, est de décomposer ce chargement en chargements simples : le FIC attaché à la première configuration est alors la somme des FIC de chacun des chargements.

Examinons par exemple le chargement de la figure (*1*) ci-contre : il s'agit d'une fissure amorcée près d'un rivet dans une plaque.



On va utiliser les solutions du chargement vu précédemment en TD (figures *a* et *b*) et décomposer le chargement *1*.

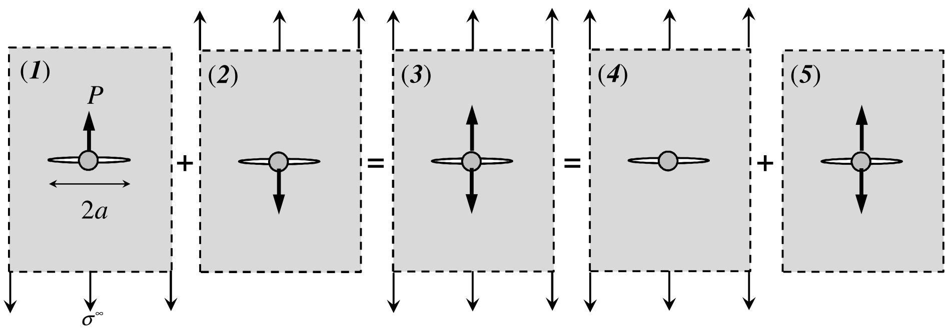




$$K_I^{(a)} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\Rightarrow K_I^{(b)} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}$$

Décomposition du chargement *1*

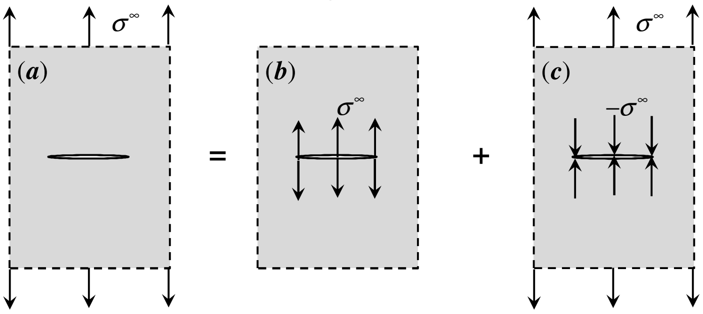


$$K_I^{(3)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 2K_I^{(1)} \Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{K_I^{(3)}}{2}$$

$$K_I^{(3)} = K_I^{(4)} + K_I^{(5)} \Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{K_I^{(4)} + K_I^{(5)}}{2}$$

$$\Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\sigma^\infty\sqrt{\pi a} + \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\right)$$

Un exemple intéressant est représenté ci-dessous. Le chargement ***a*** est la somme des chargements ***b*** et ***c***.

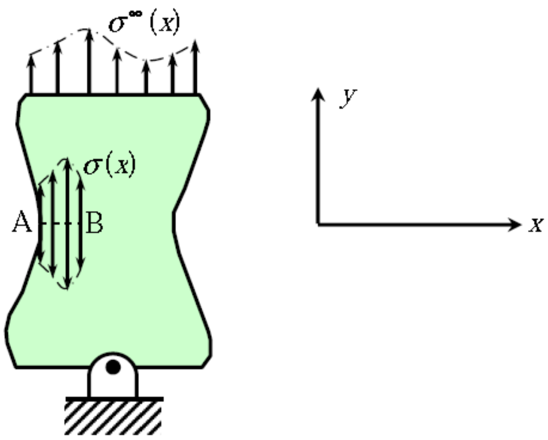


Dans le cas du chargement *c*, les lèvres de la fissure restent fermées et l'intensité des contraintes n'est pas transmise à l'extrémité de la fissure. On a donc :

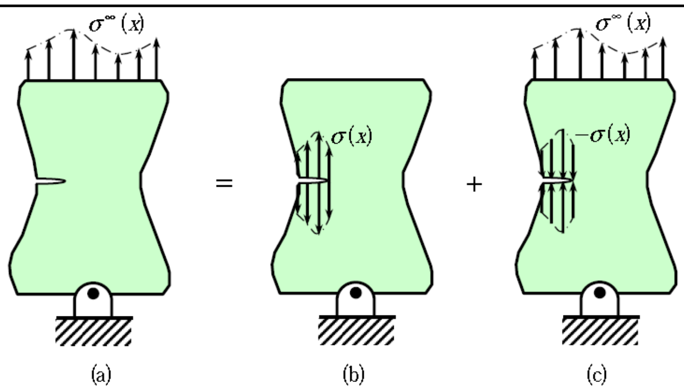
$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + \underbrace{K_I^{(c)}}_{=0} \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)}$$

Cet exemple illustre un résultat plus général : les contraintes appliquées sur la frontière d'un solide fissuré (cas de la figure *a*) peuvent être déplacées sur les lèvres de la fissure (cas de la figure *b*) sans que le FIC K_I ne change.

La figure suivante représente un solide non fissuré soumis à un chargement de traction $\sigma^\infty(x)$ qui se traduit par une répartition $\sigma(x)$ sur le plan A-B.



Solide non fissuré soumis à un chargement $\sigma^\infty(x)$ conduisant à une répartition $\sigma(x)$ sur le plan A-B.



Supposons maintenant que le solide se fissure le long du plan A-B.
Maintenir ce corps sous la contrainte $\sigma^\infty(x)$ (cf. figure a) revient, via le principe de superposition, à enlever le chargement $\sigma^\infty(x)$ pour le remplacer par le chargement $\sigma(x)$ sur les lèvres de la fissure.
Le FIC K_I est alors inchangé :

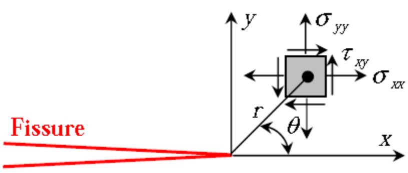
$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + \underbrace{K_I^{(c)}}_{=0} \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)}$$

Zone plastifiée à fond de fissure

Les contraintes σ_{ij} au voisinage de l'extrémité d'une fissure sont de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

où $K = K_I, K_{II}$ ou K_{III}



Le calcul en élasticité aboutit à une singularité en $r^{-1/2}$, i.e. les contraintes tendent vers l'∞ lorsque $r \rightarrow 0$.

Dans les matériaux réels, les contraintes restent évidemment finies et lorsqu'elles dépassent la limite d'élasticité σ_E du matériau, il se forme une zone plastifiée à l'extrémité de la fissure.
Il importe de connaitre la taille de cette zone plastifiée pour cerner les limites d'application de la mécanique linéaire de la rupture.

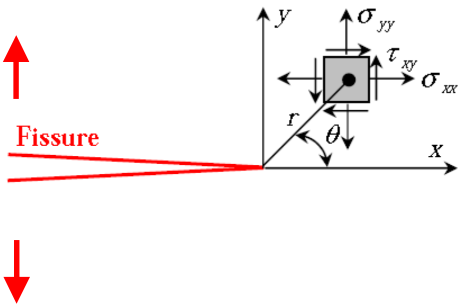
Longueur de la zone plastifiée dans le plan de la fissure

L'approche la plus simple est celle **d'Irwin**[2]. Cet auteur considère, en première approximation, que le contour de la zone plastifiée correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité σ_E du matériau. Pour déterminer le rayon r_E pour lequel cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, il pose $\sigma_y\,(r=r_E, \theta=0)= \sigma_E$, soit :

$$\boxed{\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)}$$

$$\sigma_y(r_E, \theta=0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_E}} = \sigma_E$$

$$\Rightarrow r_E = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$



[2] G.R. Irwin, *Analysis of Stresses and Strains near the end of a crack traversing a plate*, , Journal of Applied Mechanics, p. 361-364, 1957

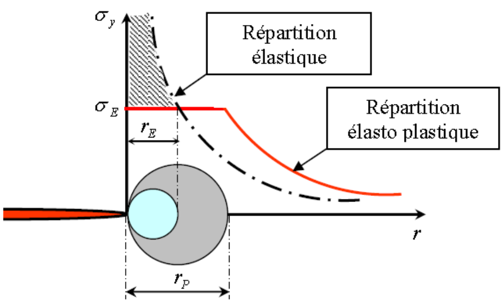
Pour représenter la distance r_E on suppose que le comportement du matériau est élastique-plastique parfait. On tronque ensuite le champ des contraintes à $\sigma_y = \sigma_E$.

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la figure ci-contre.

Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions de contraintes qui conduit à :

$$\int_0^\infty \sigma_y dr = \sigma_E \cdot r_P + \int_{r_E}^\infty \sigma_y dr$$

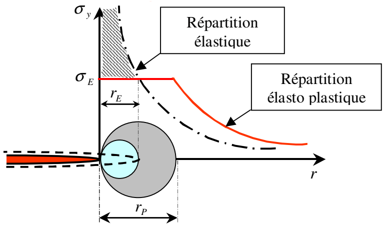
$$\Rightarrow \sigma_E \cdot r_P = \int_0^{r_E} \sigma_y dr$$



Répartition des contraintes élastiques et élasto-plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.

$$\boxed{\sigma_E \cdot r_P = \int_0^{r_E} \sigma_y \, dr} \qquad \boxed{r_E = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{r_E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = 2\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{r_E} = \frac{1}{\pi}\frac{K_I^2}{\sigma_E} = \sigma_E \cdot r_P$$



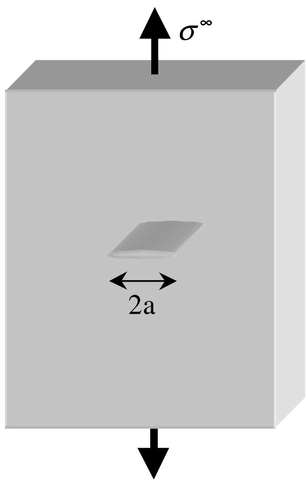
$$r_P = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2 \qquad \Rightarrow r_P = 2r_E$$

La distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique pour $r>r_P$, est obtenue par une translation d'une distance r_E de la répartition élastique.

Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif K_{eff} qu'il obtient en augmentant la longueur de fissure de r_E, ce qui revient à considérer que la fissure a une longueur effective $a_{\text{eff}}=a+ r_E$.

Dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, Le FIC sans correction est donné par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$$



Cette expression devient après correction :

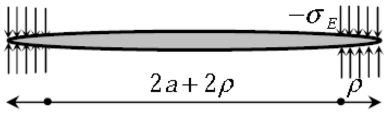
$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+r_E)}$$

$$\boxed{r_E = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E}\right)^2}$$

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E}\right)^2\right]^{1/2}$$

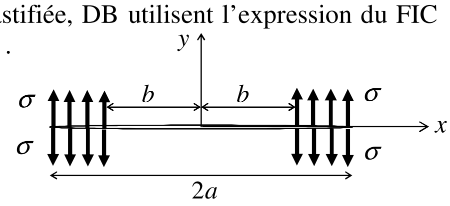
Une autre approche utilisée est celle de **Dugdale et Barenblatt** (**DB**). Ces auteurs considèrent une fissure de longueur $a+\rho$ où ρ est la taille de la zone plastifiée. Des contraintes de compression d'intensité $-\sigma_E$ s'exercent sur cette zone après décharge.

Le FIC effectif K_{eff} est ensuite calculé pour une petite fissure traversant la plaque chargée en mode d'ouverture :



$$K_I^{eff} = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi(a+\rho)}$$

Pour le calcul de la taille ρ de la zone plastifiée, DB utilisent l'expression du FIC K_I pour le chargement considéré (cf. TD9) .

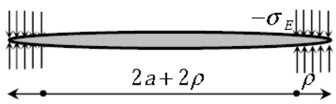


$$\boxed{K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}\arccos\frac{b}{a}}$$

Dugdale, D.S. (1960). Yielding of steel sheet containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **8**, 100–104.

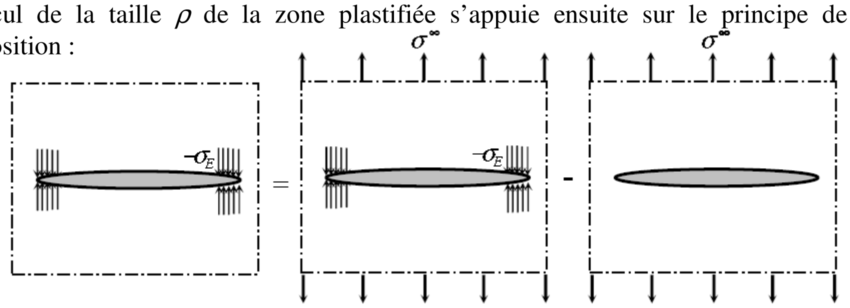
Barenblatt, G.I. (1959). On the equilibrium cracks due to brittle fracture. Straight-line cracks in flat plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **23**, 434.

$$K_I^{ADB} = -2\sigma_E\sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}}\int_a^{a+\rho}\frac{dx}{\sqrt{(a+\rho)^2-x^2}}$$



$$\Rightarrow K_I^{DB} = -2\sigma_E\sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}}\arccos\frac{a}{a+\rho}$$

Le calcul de la taille ρ de la zone plastifiée s'appuie ensuite sur le principe de superposition :



$$K_I^{DB} = 0 - \sigma^{\infty}\sqrt{\pi(a+\rho)} \qquad \Rightarrow \frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma^{\infty}}{2\sigma_E}\right)$$

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+\rho)} \quad \text{avec} \quad \frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)$$

$$K_I^{eff} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos \dfrac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right) \xrightarrow{DL \ \text{pour} \ \sigma^\infty \ll \sigma_E} 1 - \frac{\rho}{a} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)^2$$

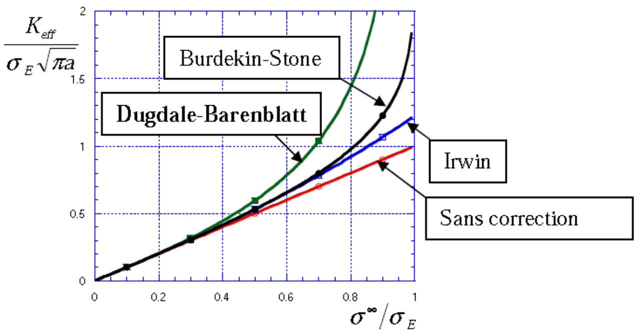
$$\Rightarrow \rho = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$

$$r_P^{Irwin} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$

Rq: $\frac{1}{\pi} \approx 0,312$ et $\frac{\pi}{8} \approx 0,393 \Rightarrow \rho^{DB} > r_P^{Irwin}$

L'approche d'Irwin sous estime la distance ρ et donc la correction apporté au FIC K_I, alors que l'approche de DB la surestime. S'appuyant sur l'approche Westergaard, Burdekin et Stone* proposent une estimation du K_{eff} se situant entre le modèle d'Irwin et celui de Dugdale-Barenblatt :

$$K_I^{eff} = \sigma_E \sqrt{\pi a} \sqrt{-\frac{8}{\pi^2} \ln\left(\cos \frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)} \quad \text{Burdekin et Stone}$$



*Burdekin, F.M. et Stone, D.E.W., « The crack opening displacement approach to fracture mechanics Yielding materials », Journal of strain Analysis 1-2 (1966)

Contour de la zone plastifiée en aval de l'extrémité de la fissure

Les modèles précédents donnent des estimations de la taille de la zone plastique r_P en $\theta = 0$, notée $r_P(\theta = 0)$. Pour déterminer $r_P(\theta)$ selon les valeurs de l'angle θ, les deux critères de plasticité les plus utilisés sont ceux de Von Mises et de Tresca. Ils s'écrivent dans l'espace des contraintes principales :

Critère de Von Mises $\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 = 2\sigma_E^2$

Critère de Tresca $Max\left(\sigma_I - \sigma_J\right) = \sigma_E$

On utilise ces deux critères pour déterminer le contour $r_P(\theta)$ de la zone plastifiée lorsque le chargement est en mode d'ouverture – mode 1 en état de contraintes planes ou de déformations planes.

En mode II ou III, le contour $r_P(\theta)$ de la zone plastifiée est déterminé par le critère de Von Mises qui s'écrit dans l'espace des contraintes non principales :

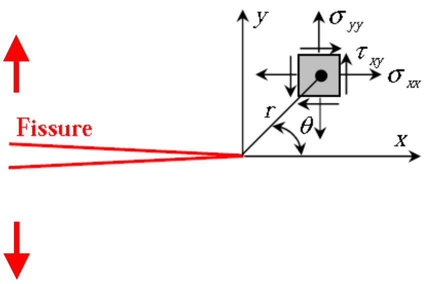
$$\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)^2 - 3\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2\right) = \sigma_E^2$$

Calcul de $r_P(\theta)$ en mode d'ouverture – mode I

Etat de contraintes planes $\sigma_3 = 0$

Von Mises $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_E^2$

avec
$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 + \sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_2 = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$



$$\Rightarrow r_P^{VM}(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

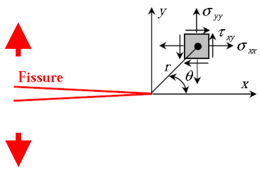
Tresca $Max\left(\sigma_I - \sigma_J\right) = \sigma_1 = \sigma_E$ $\Rightarrow r_P^{Tresca}(\theta) = \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(1 + \sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2$

Etat de déformations planes

$$\sigma_3 = \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\upsilon K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}$$

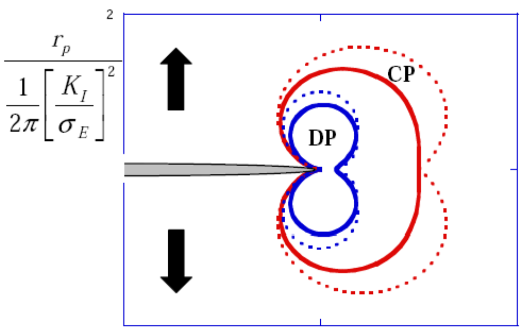
Von Mises $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2$

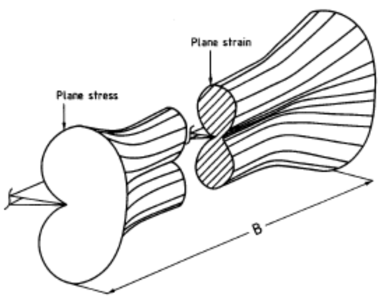
$$\frac{K_I^2}{2\pi r_P} \cos^2\frac{\theta}{2}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1 - 2\upsilon - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(1 - 2\upsilon + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right) = 2\sigma_E^2$$



$$\Rightarrow r_P^{VM} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\frac{\theta}{2}\left((1 - 2\upsilon)^2 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Tresca
$$\begin{cases} r_P(\theta) = \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(1 - 2\upsilon + \sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \le \theta \le 2\arcsin(1 - 2\upsilon) \\ r_P(\theta) = \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \sin^2\theta & \text{si } 2\arcsin(1 - 2\upsilon) < \theta \le \pi \end{cases}$$

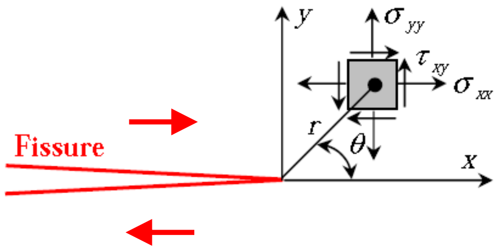




Contours des zones plastifiées en mode I (calcul pour υ=0,3)
en **CP (rouge)** et **DP(bleu)**
Trait continu - Critère de Von Mises
Trait pointillé – Critère de Tresca

Calcul de $r_P(\theta)$ en mode II – Cisaillement plan

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\left(2+\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$



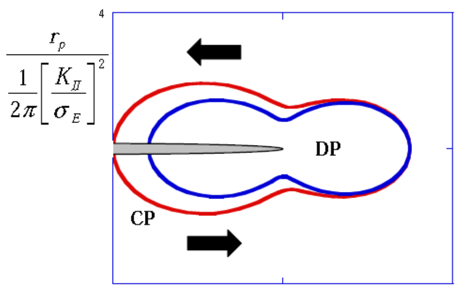
$$\text{Von Mises } \left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2 - 3\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2\right) = \sigma_E^2$$

i) Mode II en contraintes planes

$$r_P(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_E^2}\left[4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

ii) Mode II en déformations planes

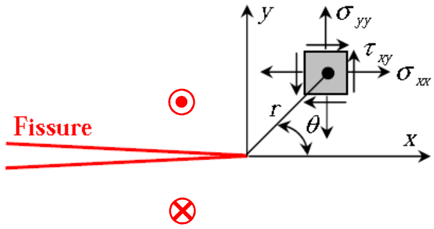
$$r_P(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_E^2}\left[4(1+\upsilon)^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) -12\upsilon\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$



Contours des zones plastifiées en mode I (calcul pour υ=0,3)
en **CP (rouge)** et **DP(bleu)**
Critère de Von Mises

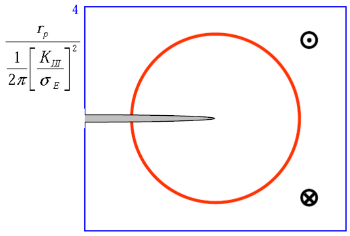
Calcul de $r_P(\theta)$ en mode III – Cisaillement anti-plan

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$



Von Mises $\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2 - 3\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2\right)=\sigma_E^2$

$$\Rightarrow r_P(\theta) = \frac{3K_{III}^2}{2\pi\sigma_E^2}$$



Méthodes pratiques de calcul du facteur d'intensité des contraintes K

Les relations donnant les champs des contraintes et des déplacements montrent que ces champs locaux sont décrits par un paramètre unique : le FIC K_I, K_{II} ou K_{III} selon le mode de sollicitation.

Comment ce paramètre s'exprime en fonction des données globales : géométrie de la structure et chargement appliqué?

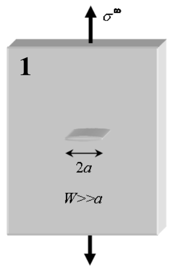
Les expressions du FIC K ont généralement la forme suivante :

$$K = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}\, f\left(a/W\right)$$

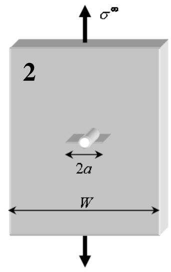
Où σ^{∞} est la contrainte appliquée à la structure, a la longueur (ou la demi longueur) de la fissure, W une dimension de la structure (souvent la largeur ou demi largeur) et $f(a/W)$ un paramètre géométrique sans dimension (appelé fonction complaisance).

Lorsque la structure est de grande dimension par rapport à la taille de la fissure, *f(a/W)* prend une valeur constante comme dans le cas d'une plaque comportant une petite fissure sollicitée en mode I (figure **1**):

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \qquad \left(f\left(a/W\right)=1\right)$$



La figure 2 représente l'éprouvette CCT (Central Cracked Tension specimen). La fissure n'est pas de taille négligeable par rapport à la largeur W de la plaque.
Le facteur d'intensité des contraintes, calculé par éléments finis, est donné par :



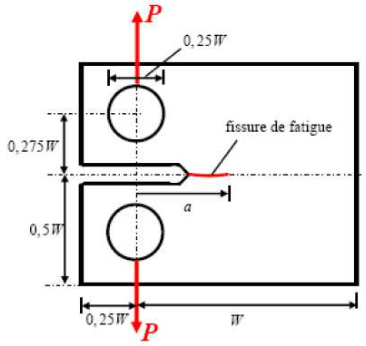
$$K = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}\, f\left(a/W\right)$$

$$f(a/W) = \left(\cos\frac{\pi a}{W}\right)^{-1/2}\left(1-0,1\left(\frac{a}{W}\right)^2+0,96\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)$$

Une autre éprouvette très utilisée dans les essais de fatigue est l'éprouvette CT (Compact Tension specimen). Le FIC K_I pour une épaisseur d'éprouvette t est donné par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}\, f\left(a/W\right)$$

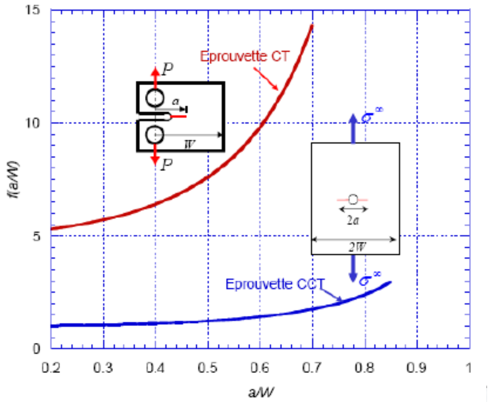
$$\sigma^\infty = \frac{P}{Wt}$$



<u>Eprouvette CT</u>

$$f\left(\frac{a}{W}\right)=\frac{\left(2+\frac{a}{W}\right)\left(0,866+4,64\left(\frac{a}{W}\right)-13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2+14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3-5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)}{\left(1-\frac{a}{W}\right)^{3/2}\left(\frac{\pi a}{W}\right)^{1/2}}$$

La figure ci-dessous compare les fonctions complaisances *f(a/W)* des éprouvettes CT et CCT

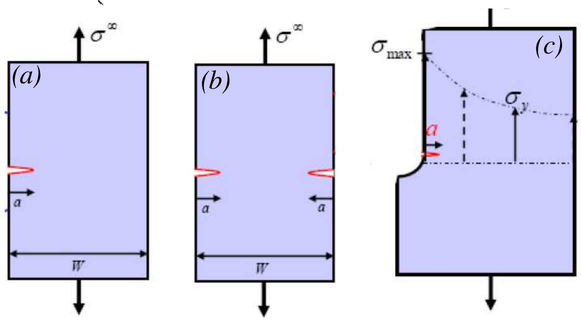


L'éprouvette CT a une longueur de ligament (W-a_0) relativement importante. Elle est très utilisée dans l'étude de la propagation des fissures de fatigue et pour déterminer la ténacité d'un matériau après pré fissuration jusqu'à une longueur de l'ordre de $a/W \approx 0{,}5$

Des manuels spécialisés donnent les expressions du FIC K pour de multiples configurations de chargement[4,5,6].
Les fonctions complaisances pour les cas les plus rencontrés dans la pratique sont :

$$f\left(\frac{a}{W}\right)=\left(1{,}12-0{,}23\left(\frac{a}{W}\right)+10{,}55\left(\frac{a}{W}\right)^2-21{,}71\left(\frac{a}{W}\right)^3+30{,}38\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)$$

Cas de la figure (a)



$$K_I=\sigma^\infty\sqrt{\pi a}\,f\left(a/W\right)$$

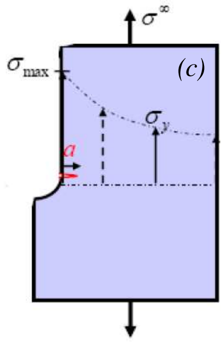
[4] D.P. Rooke and D.J. Cartwright, *Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationnary Office, London, 1976
[5] H. Tada, P.C. Paris and G.R Irwin, *The Stress Analysis Handbook*, 2nd edition Paris Productions Inc., 1985
[6] Y. Murakawi, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, 1987

$$f\left(\frac{a}{W}\right)=\left(1-2\frac{a}{W}\right)^{-1/2}\left(1{,}12-1{,}12\left(\frac{a}{W}\right)-0{,}06\left(\frac{a}{W}\right)^{2}+0{,}73\left(\frac{a}{W}\right)^{3}\right)$$

Cas de la figure (*b*)

Une configuration intéressante que l'on rencontre dans la pratique est celle schématisée sur la figure 11c. Tant que la taille de la fissure est faible, celle-ci reste dans le champ de facteur de concentration de contrainte K_t dû à la présence de l'entaille et le FIC K_I est donné en première approximation par :

$$K_I = 1{,}12\sigma^{\max}\sqrt{\pi a} = 1{,}12K_t\sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}$$

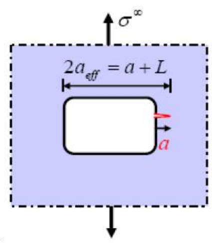


Les structures navales ou aéronautiques comportent souvent des hublots aux bords desquels des fissures peuvent s'amorcer. La figure a- présente cette configuration de fissure qui est à l'origine de l'accident survenu en 1954 en plein vol sur l'avion Comet; le chargement est dû à la pressurisation de la cabine.

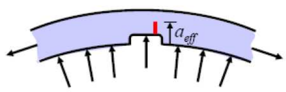
Dans ce cas on considère que la longueur effective $2a_{eff}$ de la fissure est égale à sa longueur réelle a augmentée de la largeur L du hublot :

$$2a_{eff} = a + L$$

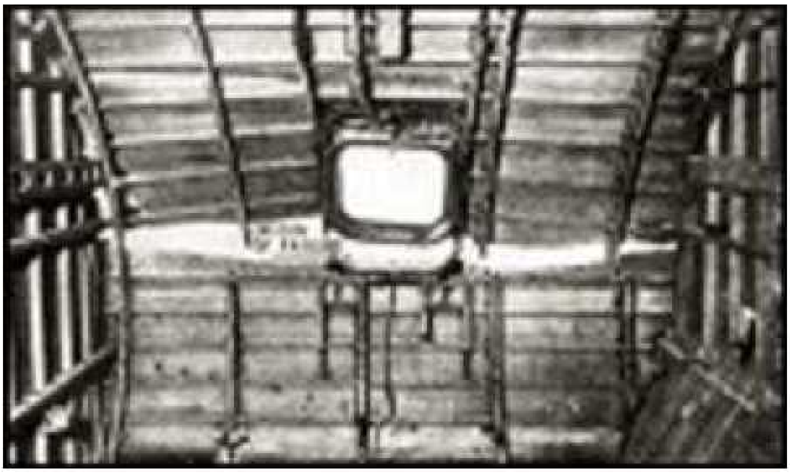
Une autre illustration de ce type de configuration de fissure est indiquée sur la figure b-. Il s'agit d'une fissure amorcée au fond d'une cannelure dans un cylindre sous pression interne. Une telle fissure peut provoquer l'éclatement du cylindre. Dans ce cas aussi on augmente la longueur réelle de la fissure par la profondeur de la cannelure.



a-



b-



fissure de fatigue partant d'un coin d'un hublot de Comet Source : http://aviation-safety.net/

Méthode des fonctions poids

Considérons une structure fissurée sollicitée en mode I sous deux conditions de chargement (**1**) et (**2**) et supposons que la solution $K_I^{(1)}$ est connue pour le chargement (**1**) . En s'appuyant sur des intégrales de contour indépendantes des contours d'intégration, Buekner[7] et Rice[8] ont montré que la solution pour le chargement (**2**) s'exprime en fonction de celle du chargement (**1**) :

$$K_I^{(2)} = \frac{E}{2K_I^{(1)}}\left[\oint_\Gamma T_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} d\Gamma + \oint_A F_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} dA\right]$$

où Γ et A sont respectivement le périmètre et l'aire de la surface fissurée, u_i, T_i et F_i les composantes, selon x et y, du vecteur déplacement, du vecteur contrainte sur le contour Γ et des forces de volume. Le chargement **(1)** étant choisi de façon arbitraire, la fonction de dimension $(Longueur)^{-1/2}$:

[7] H.F. Bueckner, *A novel principle for the computation of stress intensity factors*, Zenschrift fur Angewandte Mathematic und Mechanik, 50, pp. 529-546, 1970

[8] J.R. Rice, *Some remarks on elastic crack tip stress fields*, Journal of Solids and Structures, 8, pp. 751-758, 1972

$$h(x_i) = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a}$$

où x_i sont les coordonnées x et y, **est indépendante des conditions de chargement**. On l'appelle la **fonction poids**.

- $h(x_i)$ fonctions poids (tenseurs d'ordre 1) dépendant uniquement de la géométrie, permettent le calcul du FIK K pour n'importe quelle CL.
- Pour une structure 2D soumise à un chargement en mode I, le calcul du FIC K_I est effectué à partir de la relation :

$$K_I = \int_\Gamma p(x) h(x) dx$$

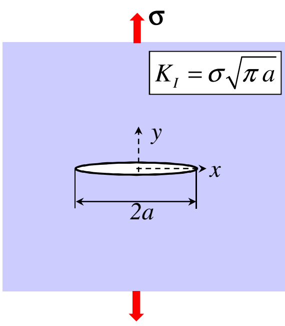
Où $p(x)$ est la traction qui s'exerce sur les lèvres de la fissure, c'est à dire la traction qui s'exercerait sur le plan de la fissure en l'absence de fissuration.

TD10 : Calcul de fonction poids

1- Calculer la fonction poids en mode I pour l'éprouvette fissurée ci-dessous

$$2\mu u_y = 2(1-\upsilon^*) \operatorname{Im} \overline{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I$$

$$h(x) = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a}$$



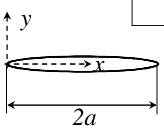
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Sur les lèvres $u_y = \frac{2}{E'} \operatorname{Im} \overline{Z}_I$ $\begin{cases} E' = E \text{ en CP} \\ E' = E/(1-\upsilon^2) \text{ en DP} \end{cases}$

Avec $Z_I = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow \overline{Z}_I = \int Z_I dx = \sigma\sqrt{x^2 - a^2}$

Sur les lèvres $|x| < a \Rightarrow \operatorname{Im} \overline{Z}_I = \sigma\sqrt{a^2 - x^2}$

En CP on a alors $u_y = 2\frac{\sigma}{E}\sqrt{a^2 - x^2}$



$x \to a - x$

$\Rightarrow$ en CP $u_y = 2\frac{\sigma}{E}\sqrt{x(2a - x)}$

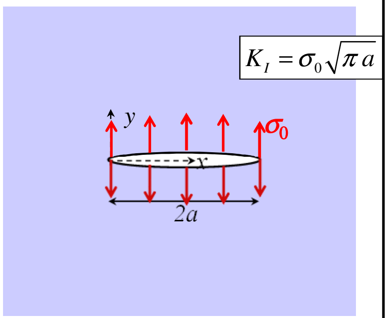
$\Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial a} = \frac{2\sigma}{E}\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

2 - vérifier que la fonction poids précédente est exacte en considérant le chargement simple σ_0 sur les lèvres de la fissure.

$$h(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a}}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \qquad K_I = \int p(x)h(x)dx$$

$$\boxed{K_I(x=2a) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi\, a}}\int_0^{2a}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx}$$



Changement de variable $x = 2a\cos^2\alpha$

$\Rightarrow dx = -4a\cos\alpha\sin\alpha$

$$\int_0^{2a}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int_0^{\pi/2} 4a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha\sin\alpha d\alpha = 2a\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\alpha)d\alpha = \pi a$$

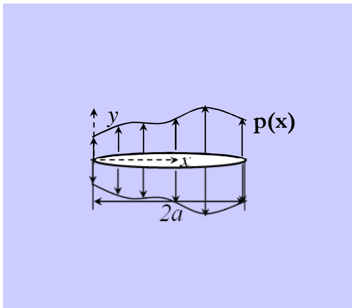
$$\Rightarrow K_I(x=2a) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi\, a}}\pi a = \sigma_0\sqrt{\pi a}$$

3 – Calculer K_I pour l'exemple ci-dessous.

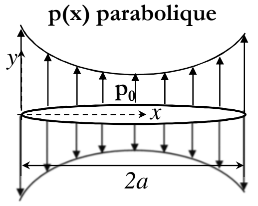
$$K_I = \int p(x)h(x)dx \qquad h(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a}}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$\boxed{K_I(x=2a) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a}}\int_0^{2a}p(x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx}$$

$$\boxed{K_I(x=0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a}}\int_0^{2a}p(x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx}$$



Exemple



$$\boxed{p(x) = p_0\left(1+\frac{(x-a)^2}{a^2}\right)}$$

$$K_I(x=0) = \frac{p_0}{\sqrt{\pi\, a}}\int_0^{2a}\left(1+\frac{(x-a)^2}{a^2}\right)\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx = \frac{3}{2}p_0\sqrt{\pi\, a}$$

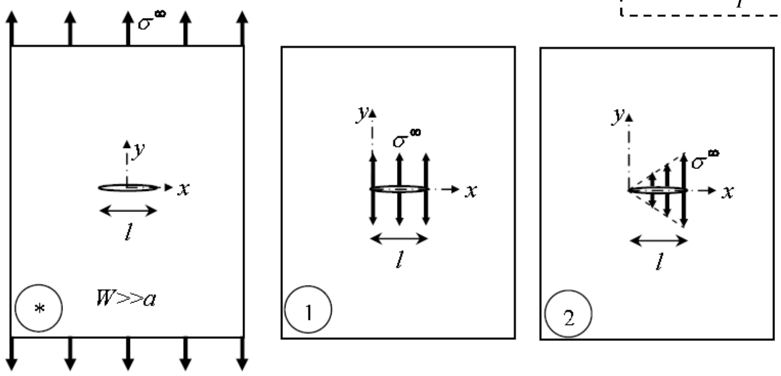
4 - Calculer le FIC K_I au l'extrémité $x=l$ pour les chargements (1) et (2) sachant que le K_I pour le chargement * est :

$$K_I^* = \sigma^\infty \sqrt{\frac{\pi l}{2}}$$

$$Z_I^*(z) = \frac{\sigma^\infty z}{\sqrt{z^2 - l^2/4}}$$

$$K_I = \int_\Gamma T_i h_i ds$$

$$h_i = \frac{E'}{2K_I^*}\frac{\partial u_i^*}{\partial l}$$



Le contour Γ à considérer est celui des lèvres de la fissure ($-l/2 < x < l/2$ et $y=0$)

Sur les lèvres $u_2^* = \frac{2}{E}\operatorname{Im}\bar{Z}_I^*(x)$ en CP

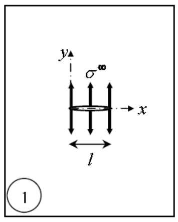
$$Z_I^*(x) = \frac{\sigma^\infty x}{\sqrt{x^2 - l^2/4}}$$

$$\bar{Z}_I^* = \int Z_1^* dx = \sigma^\infty \sqrt{x^2 - l^2/4}$$

$$\Rightarrow u_2^*(x, 0^\pm, l) = \pm\frac{2\sigma^\infty}{E}\sqrt{l^2/4 - x^2}$$

selon qu'il s'agit du déplacement sur la lèvre supérieure ($y=0^+$) ou sur la lèvre inférieure ($y=0^-$).

En se plaçant sur le repère associé au chargement (1) ce qui revient à changer x en x-$l/2$, le déplacement u_2* s'écrit :



$$u_2^*(x, 0^\pm, l) = \pm\frac{2\sigma^\infty}{E}\sqrt{x(l-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_2^*(x, 0^\pm, l)}{\partial l} = \pm\frac{\sigma^\infty}{E}\sqrt{\frac{x}{l-x}}$$

La relation $h_i = \dfrac{E}{2K_I^*}\dfrac{\partial u_i^*}{\partial l}$ donne compte tenu de $K_I^* = \sigma^\infty\sqrt{\dfrac{\pi l}{2}}$

$$h_2(x,0^\pm,l) = \pm\frac{E}{2K_I^*}\frac{\partial u_2^*(x,0^\pm,l)}{\partial l} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2\pi l}}\sqrt{\frac{x}{l-x}}$$

$$K_I = \int_\Gamma T_i h_i ds$$

Seule la composante T_2 du vecteur contrainte est non nulle. Elle est donnée par :
Chargement (1) $T_2=\sigma^\infty$ sur la lèvre supérieure et $T_2=-\sigma^\infty$ sur la lèvre inférieure,
Chargement (2) $T_2=\sigma^\infty x/l$ sur la lèvre supérieure et $T_2=-\sigma^\infty x/l$ sur la lèvre inférieure.

$$K_I^{(1)} = 2\frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^l\sqrt{\frac{x}{l-x}}dx = 2\frac{\sigma^\infty l}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^{\pi/2}2\sin^2\theta d\theta \qquad (x = l\sin^2\theta)$$

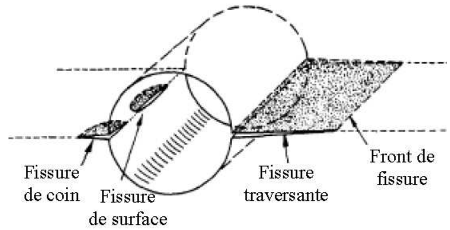
$$\Rightarrow K_I^{(1)} = 2\frac{\sigma^\infty l}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \sigma^\infty\sqrt{\frac{\pi l}{2}}$$

$$K_I^{(2)} = 2\frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^l\frac{x}{l}\sqrt{\frac{x}{l-x}}dx = 2\frac{\sigma^\infty l}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^{\pi/2}2\sin^4\theta d\theta \qquad (x = l\sin^2\theta)$$

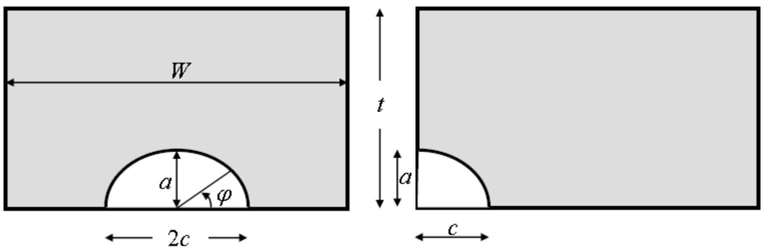
$$K_I^{(2)} = 2\frac{\sigma^\infty l}{\sqrt{2\pi l}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow K_I^{(2)} = \frac{3}{4}\sigma^\infty\sqrt{\frac{\pi l}{2}}$$

FIC K pour fissures tridimensionnelles



Les fissures traversantes avec un front bien défini ont une configuration 2D. Les méthodes indiquées précédemment permettent le calcul du FIC K dans un grand nombre de cas simples.
Lorsque les fissures ont un caractère tridimensionnel comme celles de surface ou de coin, le FIC *K* varie le long du front de fissure ; on le calcule par la méthode des éléments finis.
En pratique, lorsque ces fissures s'amorcent, elle se propagent dans les directions où le FIC *K* est plus élevé mais elles tendent le plus souvent vers une configuration où le FIC se stabilise le long du front de fissure si bien qu'on peut les traiter ensuite en 2D.



Pour des fissures de surface ou de coin de forme elliptique (a/c <1) dans des plaques sollicitées en mode I, Raju et Newman[9,10] ont proposés pour le calcul du K_I des formules empiriques obtenues par ajustement numérique aux résultats de calculs par éléments finis :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} F_S\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \varphi\right) \qquad K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} F_C\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \varphi\right)$$

[9] I.S. Raju and J.C. Newman, *Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates*, Engineering Fracture Mechanics, 11, pp. 817-829, 1979

[10] I.S. Raju and J.C. Newman, *Stress intensity factors for corner cracks*, ASTM STP 677, pp. 411-430, 1979

$$F_S = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right] f_1 f_2 f_3 f_4$$

$$M_1 = 1{,}13 - 0{,}09 a/c$$

$$M_2 = -0{,}54 + 0{,}89/\left(0{,}2 + a/c\right)$$

$$M_3 = 0{,}5 - 1/(0{,}65 + a/c) + 14(1 - a/c)^{24}$$

$$F_C = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 g_3 g_4$$

$$M_1 = 1{,}08 - 0{,}03 a/c$$

$$M_2 = -0{,}44 - 1{,}06/\left(0{,}3 + a/c\right)$$

$$M_3 = -0{,}5 + 0{,}25 a/c + 14{,}8(1 - a/c)^{15}$$

$$f_1 = \left(1 + 1{,}464(a/c)^{1{,}65}\right)^{-1/2}$$

$$f_2 = 1 + \left(0{,}1 + 0{,}35(a/t)^2\right)\left(1 - \sin\varphi\right)^2$$

$$f_3 = \left[\cos\left(\frac{\pi c}{2W} \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{-1/2}$$

$$f_4 = \left[\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2\varphi \right]^{1/4}$$

$$g_1 = f_1 = \left(1 + 1{,}464(a/c)^{1{,}65}\right)^{-1/2}$$

$$g_2 = 1 + \left(0{,}08 + 0{,}4(a/t)^2\right)(1 - \sin\varphi)^3$$

$$g_3 = 1 + \left(0{,}08 + 0{,}15(a/t)^2\right)(1 - \cos\varphi)^3$$

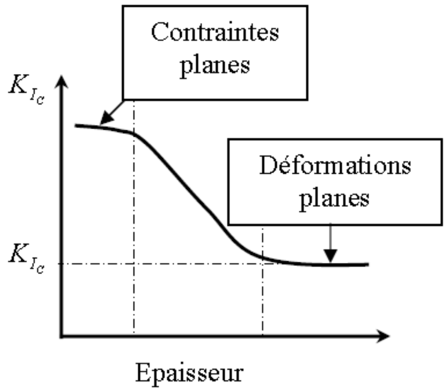
$$g_4 = f_4 = \left[\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2\varphi \right]^{1/4}$$

FIC critique - Ténacité

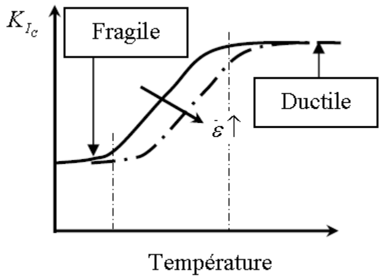
Etant donnés une fissure et un mode de sollicitation, l'expérience montre qu'il se produit une propagation brutale de la fissure lorsque le facteur d'intensité des contraintes atteint une valeur critique notée K_C. Cette valeur critique qui caractérise la capacité d'un matériau à résister à la propagation brutale des fissures, est appelée **ténacité**. Comme le mode d'ouverture est le plus endommageant, c'est la valeur critique K_{I_C} obtenue en mode I qui est généralement retenue pour caractériser la ténacité.

Le rôle de la **ténacité** K_{I_C} en mécanique de la rupture, est analogue à celui de la limite d'élasticité σ_E en mécanique classique. K_{I_C} dépend comme σ_E de la température d'essai et de la vitesse de déformation, mais aussi de l'épaisseur du matériau testé.

Les évolutions caractéristiques de K_{Ic}, obtenues à partir d'essais normalisées, sont représentées schématiquement sur la figure suivante.



L'épaisseur influe sur l'état de contrainte. Dans les éprouvettes d'essais de faible épaisseur (plaques), chargées en mode I dans leur plan, l'état de contraintes planes est prédominant et la valeur critique du FIC est élevée, notamment dans les matériaux ductiles. Lorsque l'épaisseur augmente, on observe une transition vers un état de déformations planes, le FIC critique diminue et n'évolue plus au-delà d'une certaine épaisseur - c'est cette valeur minimale stabilisée du K_{I_C} qui définit la ténacité du matériau.



Dans les alliages métalliques tels que les aciers, l'influence de la température se caractérise par une transition très significative entre un domaine fragile à basse température et faible ténacité, et un domaine ductile à haute température et forte ténacité. Cette zone de transition ductile fragile se déplace vers les températures plus grandes lorsque la vitesse d'essai $\dot{\varepsilon}$ augmente. Lorsqu'il y a des risques d'explosion, ce comportement rend très délicat le dimensionnement des structures – tout simplement, parce qu'une explosion provoque une augmentation brutale de la vitesse de déformation de la structure.

Le vieillissement des matériaux influe, comme la vitesse de déformation, sur la ténacité : à mesure que les matériaux vieillissent, le domaine fragile s'étend aux dépens du domaine ductile avec translation de la zone de transition vers les températures plus grandes. Pour cette raison, certains vieux ponts de structure métallique sont fermés en périodes de gel, puisqu'ils deviennent alors très fragiles (un peu comme le verre) et menacent à tout moment de rompre.

Quelques valeurs de la ténacité des matériaux

Matériau	Ténacité (MPa□m	σ_R (MPa)
2014 T651	40	500
TA6V	85	1020
40CrMoV20	42	1850
35NiCrMo16	95	1850
Céramique	5	800

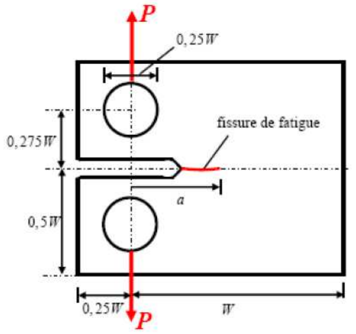
http://nte.mines-albi.fr/SciMat/co/SM6uc2-2.html

Alliage d'aluminium	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 30\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
Alliage de titane	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 100\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
Acier trempé	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 120\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
Polymère	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 3\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
Bois	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 2\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
Béton	$K_{\mathrm{Ic}} \simeq 1\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

Mesure de la ténacité

Les mesures de ténacité sont faites sur des éprouvettes normalisées préfissurées en fatigue. Pour une bonne mesure de la ténacité K_{I_C}, les normes ASTM[12] imposent les conditions suivantes :

$$a, e, (W-a) \geq 2,5\left(\frac{K_{I_C}}{\sigma_E}\right)^2$$



où σ_E, a, e et W sont respectivement la limite d'élasticité du matériau, la longueur de la fissure, l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette ; $W-a$ est la longueur du ligament non fissuré.

[12] Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, Annual Book of ASTM Standards, Part 10, E399-81, American Society for Testing and Materials, pp. 592-621, 1981

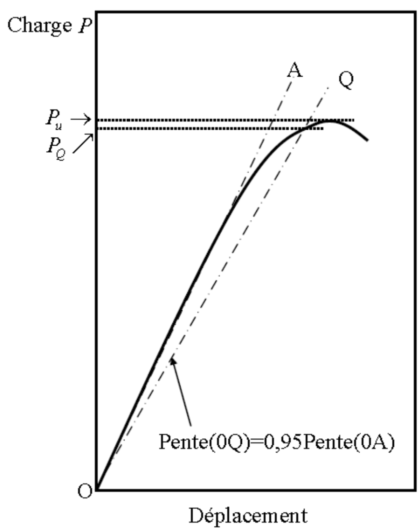
En plus des conditions précédentes, les normes ASTM exigent, lors de l'essai de mesure de K_{Ic}, de s'assurer que :

i. les longueurs de la fissure mesurées sur chaque coté de la surface de l'éprouvette d'essai ne diffèrent pas de plus de 10% de la longueur moyenne mesurée à cœur d'éprouvette ;

ii. le $K_I^{\max}$ auquel est soumise l'éprouvette dans la phase de préfissuration, ne dépasse pas $0,6K_{I_C}$, et qu'au cours du dernier stade de fissuration $K_I / E < 0,32 \cdot 10^{-3}\sqrt{m}$;

iii. $P_u / P_Q < 1,1$ où les charges P_u et P_Q sont déterminées lors de la rupture de l'éprouvette selon la procédure graphique indiquée sur la figure 22 ;

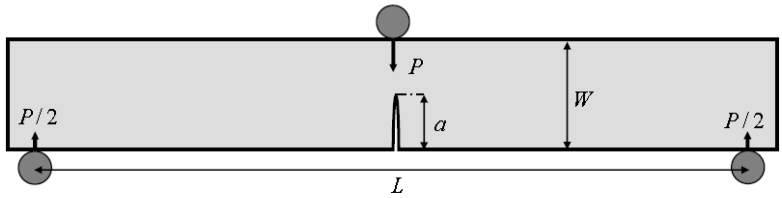
iv. $0,55MPa\sqrt{m}/s < \Delta K_I / t < 2,75MPa\sqrt{m}/s$ où $\Delta K_I / t$ est le diagramme *P-d* ; chargement.



$$K_{IC} = K_Q$$

Diagramme charge-déplacement et procédure de détermination des charges P_Q et P_u.

TD11 : Mesure de ténacité K_{Ic}

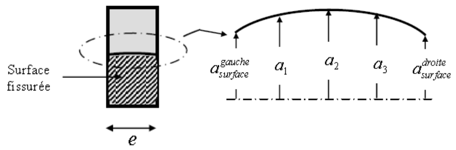


Une éprouvette de flexion trois points (figure □) est testée conformément aux recommandations de l'ASTM. $\sigma_E = 1200MPa$ et $E = 210GPa$ sont les valeurs respectives de la limite d'élasticité et du module d'Young du matériau. L'éprouvette est chargée à une vitesse de $100kN/mn$. Elle est préfissurée en fatigue à $P_1^{\max} = 45kN$ et $P^{\min} = 0$. Les derniers cycles pour atteindre une longueur de fissure a telle que $a/W \approx 0,5$, sont effectués à $P_2^{\max} = 30kN$. Les dimensions mesurées sont :

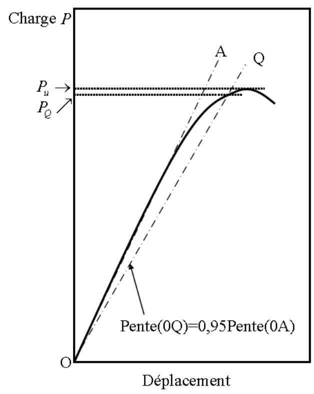
$W = 8cm \quad e = 4cm \quad L = 30cm$

$a_1 = 3,996cm \quad a_2 = 4,007cm \quad a_3 = 3,997cm$

$a_{surface}^{gauche} = 3,915cm$ et $a_{surface}^{droite} = 3,952cm$



L'enregistrement du digramme charge-déplacement a donné les valeurs suivantes



$P_u = 86kN \qquad P_Q = 80kN$

Le FIC KI pour l'éprouvette testée est calculé par la relation suivante :

$$K_I = \frac{PL}{eW^{3/2}} g(a/W)$$

$$g(a/W) = \frac{3\sqrt{a/W}\left(1,99 - (a/W)(1-a/W)(2,15 - 3,93a/W + 2,7(a/W)^2\right)}{2(1+2a/W)(1-a/W)^{3/2}}$$

Calculer la ténacité K_{Ic} et vérifier que la valeur trouvée est conforme aux conditions de l'ASTM.

Corrigé du TD 11

• On calcule dans un premier temps $a_{moy} = (a_1 + a_2 + a_3)/3$, soit $a_{moy} = 4cm$

• On détermine ensuite $K_Q = \frac{P_Q L}{eW^{3/2}} g\left(\frac{a_{moy}}{W}\right)$, avec $\frac{a_{moy}}{W} = \frac{1}{2}$, d'où $g\left(\frac{a_{moy}}{W}\right) = 2{,}663$ et

$$K_Q = \frac{80kN \cdot 0{,}3m}{0{,}04m \cdot (0{,}08m)^{3/2}} 2{,}663 = 70{,}6MPa\sqrt{m}$$

• On vérifie toutes les conditions imposées par l'ASTM :

- $a, e, (W-a) \geq 2{,}5\left(\frac{K_Q}{\sigma_E}\right)^2 = 2{,}5\left(\frac{70{,}6MPa\sqrt{m}}{1200MPa}\right)^2 = 0{,}865 \cdot 10^{-2} m = 8{,}65mm$

1ère condition vérifiée

- $\frac{a_{moy} - a_{surface}^{gauche}}{a_{moy}} = \frac{4 - 3{,}915}{4} = 0{,}02 < 0{,}1$ et $\frac{a_{moy} - a_{surface}^{droite}}{a_{moy}} = \frac{4 - 3{,}952}{4} = 0{,}012 < 0{,}1$

Condition *i.* vérifiée

- $K_I^{max} = \frac{P_1^{max} L}{eW^{3/2}} g(a/W) = \frac{45kN \cdot 0{,}3m}{0{,}04 \cdot (0{,}08)^{3/2}} 2{,}663 = 39{,}7MPa\sqrt{m} < 0{,}6K_Q$ et

le dernier stade de propagation est effectué à $P_2^{max} = 30kN$ d'où

$$\frac{K_I}{E} = \frac{1}{E}\frac{30kN \cdot 0{,}3m}{0{,}04 \cdot (0{,}08)^{3/2}} 2{,}663 = \frac{29{,}6MPa\sqrt{m}}{210000MPa} = 0{,}14 \cdot 10^{-3}\sqrt{m} < 0{,}32 \cdot 10^{-3}\sqrt{m}$$

Condition *ii.* vérifiée

- $\frac{P_u}{P_Q} = \frac{86}{80} = 1{,}08 < 1{,}1$

Condition *iii.* vérifiée

- $\frac{\Delta K_I}{\Delta t} = \frac{\left(100\frac{kN}{60s}\right) \cdot 0{,}3}{0{,}04 \cdot (0{,}08)^{3/2}} 2{,}663 = 1{,}47 \frac{MPa\sqrt{m}}{s}$ soit $0{,}55 < \frac{\Delta K_I}{\Delta t} < 2{,}75 \frac{MPa\sqrt{m}}{s}$

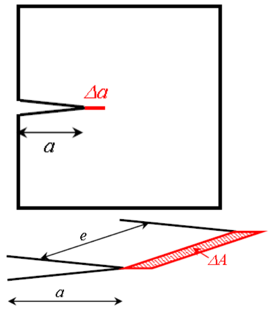
Condition *iv.* vérifiée

Conditions de l'ASTM toutes vérifiées.

$$K_{IC} = K_Q = 70{,}6MPa\sqrt{m}$$

Approche énergétique de Griffith

Dans un matériau, une extension Δa d'une fissure de longueur a s'accompagne des variations d'énergie suivante :



$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{él} + \Delta U$$

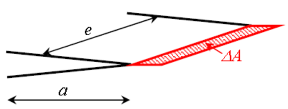
ΔW_{ext} la variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures),

$\Delta W_{él}$ la variation d'énergie élastique (emmagasinée),

ΔU l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa.

Dans la théorie de Griffith qui s'applique à la rupture fragile, ΔU correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau : $\Delta U = \Delta W_{sep}$ où ΔW_{sep} est l'énergie de séparation des surfaces. Griffith introduit à partir de ΔU une énergie de propagation de la fissure par unité de surface, notée G et définie par :

$$G = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}$$



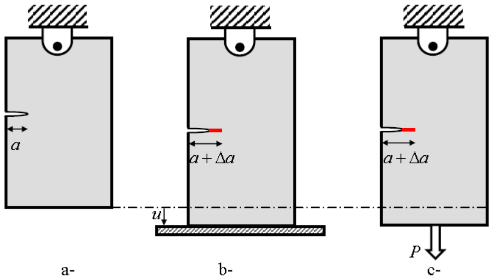
où $\Delta A = e\Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur une longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e ; G est une énergie par unité de surface qui s'exprime en général en kJ/m^2.

Généralement, on considère l'unité d'épaisseur (e=1) si bien que l'énergie G rapportée à l'épaisseur unité devient :

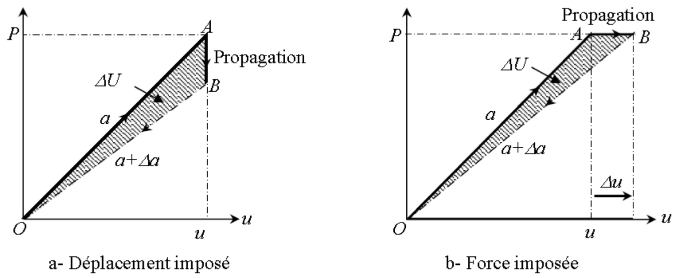
$$G = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\partial U}{\partial a}$$

L'énergie G est appelée aussi ***taux de restitution d'énergie*** et pour bien comprendre cette signification, on va considérer la propagation (dans une éprouvette d'épaisseur unité) dans les deux cas classiques suivants :

- Propagation à déplacement u imposé (figure b)
- Propagation à force P imposée (figure c)



Propagation à déplacement (b) ou à force (c) imposés.



Diagrammes charge-déplacement

i. Propagation à déplacement imposé (u=constante)

Δu=0 ΔW_{ext}=0 avec $W_{él}$=Pu/2, soit en introduisant la complaisance (c.à.d. l'inverse de la rigidité) C=u/P :

$$W_{él} = \frac{1}{2} CP^2 = \frac{u^2}{2C} \Rightarrow \Delta W_{él} = -\frac{u^2}{2C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_u \Delta a$$

On constate ainsi que l'énergie élastique emmagasinée décroît.

Comme $\Delta W_{ext} = 0 = \Delta U + \Delta W_{él} \Rightarrow \Delta U = -\Delta W_{él}$ et $G = \lim_{\Delta a \to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta a}\right)$, soit :

$$G = \frac{u^2}{2C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_u = \frac{P^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_u$$

ii. Propagation à force imposée (*P*=constante)

$$\Delta P = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\left(\frac{u}{C}\right) = 0\text{, soit } \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta C}{C}$$

$$\Delta W_{ext} = P.\Delta u = \frac{Pu}{C}.\Delta C \approx P^2\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_P \Delta a$$

$$W_{él} = \frac{1}{2}Pu = \frac{P^2}{2}C \text{ d'où } \Delta W_{él} = \frac{P^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_P \Delta a$$

$\Delta U = \Delta W_{ext} - \Delta W_{él} = \dfrac{P^2}{2}\left(\dfrac{\partial C}{\partial a}\right)_P \Delta a$, et l'énergie de Griffith s'écrit alors :

$$G = \frac{P^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_P$$

Les expressions précédentes de l'énergie de Griffith *G* pour une propagation de fissure à déplacement ou force imposés peuvent se mettre sous une forme unique :

$$G = \frac{P^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{u \text{ ou } P}$$

Si l'épaisseur e de l'éprouvette n'est pas égale à un, l'expression de *G* est :

$$G = \frac{P^2}{2e}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{u \text{ ou } P}$$

Dans les deux cas examinés (chargement à déplacement ou force imposés), il apparait que l'énergie ΔU dépensée lors de la propagation est égale à l'aire du triangle *OAB* dans le diagramme charge-déplacement.
Pour réaliser ce type de chargement, la machine d'essai doit être soit de rigidité infinie pour imposer un déplacement, soit de souplesse infinie pour imposer une force.
Dans la pratique des essais, on est entre ces deux cas extrêmes et le diagramme charge-déplacement présente pour différentes longueurs de fissure a_i, l'allure suivante :

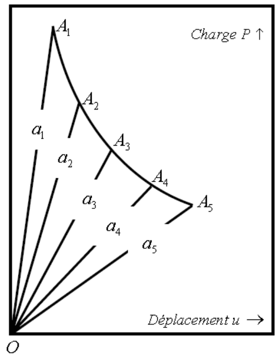
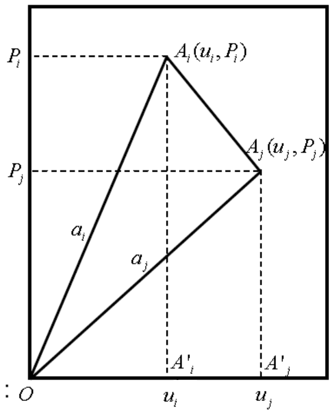


Diagramme charge-déplacement pour différentes longueurs de fissure.

Considérons à présent deux longueurs de fissure a_i et a_j. L'énergie ΔU correspond à l'aire du triangle OA_iA_j :

$$\begin{aligned}\Delta U &= Aire(OA_iA_j)\\ &= Aire(OA_iA_i^{'}) + Aire(A_i^{'}A_iA_jA_j^{'}) - Aire(OA_jA_j^{'})\\ &= \frac{1}{2}P_iu_i + \frac{1}{2}(P_i+P_j)(u_j-u_i) - \frac{1}{2}P_ju_j\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}(P_iu_j - P_ju_i)$$



et l'énergie de propagation de Griffith s'écrit alors :

$$G = \frac{1}{2e}\frac{P_iu_j - P_ju_i}{a_j - a_i}$$

Energie de Griffith critique G_C

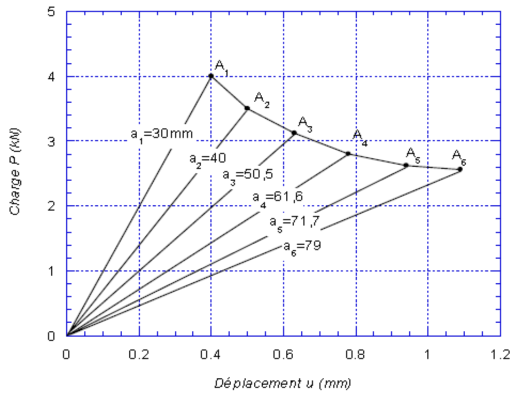
Comme pour le FIC K, l'expérience montre que pour un mode de sollicitation donné (mode I, II ou III), la propagation brutale intervient lorsque l'énergie de Griffith atteint une valeur critique notée G_{I_C}, G_{II_C} ou G_{III_C}. En pratique, c'est la valeur critique G_{I_C} obtenue en mode I qui est retenue. G_{I_C} est également une caractéristique de la capacité d'un matériau à résister à la propagation brutale des fissures. C'est donc aussi une mesure de la ténacité. Elle s'exprime en KJ/m^2 alors que la ténacité mesurée à partir du FIC s'exprime en $MPa\sqrt{m}$.

TD12 : Mesure de ténacité G_{Ic}

Une série d'essais sur des éprouvettes d'épaisseur $1mm$ préfissurées en mode I à différentes longueurs jusqu'à rupture, a été effectuée pour déterminer la ténacité d'un acier. Elle a donné les résultats suivants :

Longueur de fissure $a(mm)$	Charge critique $P(kN)$	Déplacement critique $u(mm)$
30,0	4,00	0,40
40,0	3,50	0,50
50,5	3,12	0,63
61,6	2,80	0,78
71,7	2,62	0,94
79,0	2,56	1,09

Ces résultats sont représentés sur les courbes charge-déplacement de la figure suivante ;



Courbe charge-déplacement à rupture d'un acier

Calculer la valeur moyenne en *KJ/m²* de la ténacité de l'acier par les deux méthodes :

$$G_I = \frac{1}{2e}\frac{P_i u_j - P_j u_i}{a_j - a_i} \qquad G_I = \frac{P^2}{2e}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{u \text{ ou } P}$$

Corrigé du TD 12

Calcul de G_{IC} à partir des aires dans le diagramme charge-déplacement

Longueur de fissure $a(mm)$	Charge critique $P(kN)$	Déplacement critique $u(mm)$
30,0	4,00	0,40
40,0	3,50	0,50
50,5	3,12	0,63
61,6	2,80	0,78
71,7	2,62	0,94
79,0	2,56	1,09

$$G_I = \frac{1}{2e}\frac{P_i u_j - P_j u_i}{a_j - a_i}$$

Aire triangle $OA_1A_2 \Rightarrow G_{IC} = \dfrac{1}{2\cdot 10^{-3}}\dfrac{4\times 0,5 - 3,5\times 0,4}{(40-30)\cdot 10^{-3}} = 30,0 KJ/m^2$

Aires	OA_1A_2	OA_2A_3	OA_3A_4	OA_4A_5	OA_5A_6
$G_{I_C}(kJ/m^2)$	30,0	30,7	30,2	29,1	30,8

$$\Rightarrow G_{IC}^{moy} = \frac{\sum G_{IC}}{5} = 30,2 \pm 0,6 KJ/m^2$$

Calcul de G_{IC} à partir des variations de la complaisance

Longueur de fissure $a(mm)$	Charge critique $P(kN)$	Déplacement critique $u(mm)$
30,0	4,00	0,40
40,0	3,50	0,50
50,5	3,12	0,63
61,6	2,80	0,78
71,7	2,62	0,94
79,0	2,56	1,09

$$G_I = \frac{P^2}{2e}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{u \text{ ou } P}$$

Les valeurs de la complaisance $C=u/P$ sont directement déduites des données :

a (mm)	30,0	40,0	50,5	61,6	71,7	79,0
$C(10^{-7} m/N)$	1,00	1,43	2,02	2,79	3,59	4,26

a (mm)	30,0	40,0	50,5	61,6	71,7	79,0
$C(10^{-7} m/N)$	1,00	1,43	2,02	2,79	3,59	4,26

La ténacité est calculée par la relation $G_I = \frac{P^2}{2e}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)$

Pour plus de précision, on détermine G_{IC} à partir des valeurs moyennes de $\partial C/\partial a$ calculées à gauche et à droite de chaque valeur de a .

$$(\partial C/\partial a) = \frac{(1,43-1,00)\cdot 10^{-7}}{10\cdot 10^{-3}} = 4,30\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$(\partial C/\partial a) = \frac{(2,02-1,43)\cdot 10^{-7}}{10,5\cdot 10^{-3}} = 5,62\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$(\partial C/\partial a) = \frac{(2,79-2,02)\cdot 10^{-7}}{11,1\cdot 10^{-3}} = 6,94\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$(\partial C/\partial a) = \frac{(3,59-2,79)\cdot 10^{-7}}{10,1\cdot 10^{-3}} = 7,92\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$(\partial C/\partial a)^D = \frac{(4,26-3,59)\cdot 10^{-7}}{7,3\cdot 10^{-3}} = 9,18\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$a = 40mm \quad \Rightarrow (\partial C/\partial a)^{moy} = 4,96\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$a = 50,5mm \quad \Rightarrow (\partial C/\partial a)^{moy} = 6,28\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$a = 61,6mm \quad \Rightarrow (\partial C/\partial a)^{moy} = 7,43\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$a = 71,7mm \quad \Rightarrow (\partial C/\partial a)^{moy} = 8,55\cdot 10^{-6} N^{-1}$$

$$G_{IC}(a = 40mm) = \frac{(3,5)^2\cdot 10^6}{2\cdot 10^{-3}} 4,96\cdot 10^{-6} \Rightarrow G_{IC} = 30,38 KJ/m^2$$

a (mm)	40	50,5	61,6	71,7
G_{IC} (KJ/m^2)	30,38	30,57	29,13	29,35

$$\Rightarrow G_{IC}^{moy} = \frac{\sum G_{IC}}{4} = 29{,}86 \pm 0{,}39 KJ/m^2$$

Les deux méthodes donnent des valeurs de la ténacité G_{IC} proches.